A. Kaufmann G. Desbazeille

METODA DRUMULUI CRITIC

seria BAZELE MATEMATICE ALE CERCETĂRII OPERAȚIONALE

Printre metodele abordate în ultimii ani în cadrul dezvoltării cercetării operaţionale, metoda drumului critic ocupă un loc dominant prin simplitatea, eficacitatea şi numeroasele sale aplicaţii.

Lucrarea „Metoda drumului critic" de A. Kaufmann şi G. Dezbazeille, care are meritul esenţial de a fi în primul rînd practică, beneficiază de claritatea şi verva cu care autorii ştiu să prezinte, sub forme sistematice şi uşor abordabile, capitole de bază ale cercetării operaţionale. După o scurtă recapitulare teoretică a teoriei grafurilor şi a problemelor de ordonanţare, autorii abordează noţiunile concrete, legate de stabilirea unui program de cercetare sau de producţie.

Aplicaţiile numeroase constituie unul dintre elementele cheie, graţie cărora algoritmii prezentaţi capătă un caracter concret.

Lucrarea se adresează inginerilor, organizatorilor şi conducătorilor proceselor de producţie, planificatorilor şi, în general, tuturor celor care răspund de elaborarea şi controlul executării programelor.

seria
BAZELE
MATEMATICE
ALE
CERCETĂRII
OPERAȚIONALE

Prof. **A. Kaufmann** Ing. **G. Desbazeille**

METODA DRUMULUI CRITIC

Aplicarea metodei PERT şi a variantelor sale
la programele de producţie şi de învăţământ

Traducere din limba franceză, după ediţia a doua

Editura tehnică

București — 1971

Traducere și control științific:
prof. **Gavril Sâmboan** și dr. **Ioan Tomescu**

Redactor: **Valentina Bucur**

Tehnoredactor: **Valeriu Morărescu**

Coperta și supracoperta: **Valentin Vișan**

La méthode du chemin critique par A. Kaufmann et G. Desbazeille

© Dunod, Paris, 1969

CUVÎNT ÎNAINTE

Iată o lucrare foarte utilă, care vine la timp şi căreia îi dorim o foarte largă popularitate. Curiozitatea şi interesul trezite aproape pretutindeni în lume de sistemul PERT sau metoda drumului critic („Critical Path Scheduling") în cursul ultimilor ani se bazează pe mai multe cauze. Sînt înclinat să cred că succesul ei se datorează în mare parte faptului că ea nu necesită, ca alte metode de cercetare operaţională, o formaţie matematică prealabilă avansată şi că noţiunile la care apelează sînt destul de intuitive. De asemenea, ea se asimilează uşor şi, prin urmare, este accesibilă.

Bineînţeles, ar mai trebui ca această metodă să răspundă unor necesităţi reale şi adesea resimţite de toţi aceia care au de dus la bun sfîrşit realizarea unui proiect sau a unui mare ansamblu. Chiar aceasta este efectiv situaţia, deoarece insuficienţele diagramei clasice a lui Gantt au devenit flagrante. Lucrarea de faţă are, după părerea mea, un merit esenţial: acela de a fi în primul rînd practică.

După un prim capitol de recapitulări teoretice asupra teoriei grafurilor şi a problemelor de ordonanţare, autorii abordează noţiuni concrete şi fundamentale, ca antecedenţi şi descendenţi, timpi operatori, interval de fluctuaţie, margini (totale, libere, sigure), pe care practicienii nu vor avea nici o dificultate în a le identifica, referindu-se la propria lor experienţă. Apoi urmează preţioasele exemple numerice datorită cărora algoritmii prezentaţi îşi pierd caracterul lor greoi. Nu am sfătui prea mult pe cititori să studieze amănunţit, cu creionul în mînă, exemplul concret împrumutat de la Pacaud, cu diferitele sale variante.

Intervenţia factorului aleator în duratele operaţiilor presupuse determinate iniţial se reduce în primele două capitole la raţionarea pe timpi medii şi pe dispersii, care se adună, admiţîndu-se independenţa repartiţiilor şi existenţa nedeplasării în estimaţiile succesive.

Capitolul al treilea generalizează metoda PERT introducînd un model stochastic, care se aplică, în particular, cazurilor în care nu există nici o experienţă prealabilă, permiţînd stabilirea de grafuri perfect definite.

Capitolul al patrulea, tratînd optimizarea asociată duratelor şi costurilor, este cel mai dezvoltat şi cel mai pasionant.

În expunerea algoritmului lui Fulkerson se întîlneşte problema mai generală a programării liniare parametrice şi conceptul universal de dualitate. Dacă aspectul teoretic poate să pară puţin, greoi, trebuie ca cititorul, după o primă lectură, să încerce, înainte de a reveni, să urmărească pas cu pas exemplul din 4.9, care ocupă un loc important în lucrare şi constituie unul din elementele cheie. Cea mai mare parte a capitolului al patrulea tratează, desigur, optimizarea unui program cu durate fixate ale operaţiilor. Doar în ultimele pagini este schiţat un caz aleator, în care timpul operator mediu şi abaterea sa tip variază liniar în funcţie de cost, ceea ce constituie tot ce se poate face în această etapă mai rafinat şi mai aproape de o realitate intrinsec complexă. Cazurile mai speciale fac obiectul comunicărilor foarte recente ale specialiştilor, la toate congresele şi în toate revistele periodice de cercetare operaţională.

Această lucrare, aşa cum se prezintă, poate fi citită şi asimilată de cercul larg al celor interesaţi în aceste probleme. Sperăm ca lucrarea să ajute la o mai bună cunoaştere a importanţei şi a supleţei metodei PERT, a cărei notorietate este astăzi foarte mare. Astfel, în Statele Unite administraţia ia în considerare numai ofertele pentru executarea cărora candidatul prezintă un program de ordonanţare, conform acestei metode.

În încheiere, voi cita cîteva cuvinte ale directorului general al unei mari societăţi din Spania: „De cînd am aplicat recent metoda PERT pentru construirea unei clădiri industriale în uzina noastră, nu mai există nici un proiect nou care să nu facă obiectul stabilirii unui program PERT, în înţelegere strînsă între proiectanţi, inginerii constructori şi cercetătorii operaţionali. Dacă am fi cunoscut-o şi aplicat-o mai dinainte, în mod sigur am fi evitat multe ezitări, manevre false, reproşuri între părţile interesate şi am fi cîştigat mult în timp, în bani şi în coeziunea inginerilor noştri".

E. VENTURA
Director al Societăţii de studii aplicate
în cercetarea operaţională

PREFAȚĂ

Printre metodele elaborate în ultimii ani cu scopul punerii în lucru și al supravegherii executării programelor de producție sau de cercetare, metoda drumului critic ocupă un loc de frunte, prin simplitatea și eficacitatea sa precum și prin bogăția variantelor care se dezvoltă neîncetat. Fie că este vorba de metoda americană PERT, de metoda franceză a potențialelor sau de diverse variante propuse cam peste tot, baza matematică a acestora este constituită de teoria grafurilor, ea însăși o parte importantă a teoriei mulțimilor

Este necesar ca inginerii, organizatorii, planificatorii și, în general, toți cei care au responsabilități în elaborarea și controlul programelor, să cunoască posibilitățile oferite de metoda drumului critic. Trebuie să arătăm că această metodă nu este universală și că multe probleme nu pot fi rezolvate cu ajutorul ei; pe măsură ce se descoperă și se introduc noi metode de ordonanțare și de planificare, se descoperă că apar noi probleme care necesită algoritmi diferiți sau mai perfecționați. Structurile lumii moderne se complică din zi în zi și metodele științifice devin indispensabile pentru orientarea în acest gen de dificultăți combinatorii, în cazul activităților mici, mijlocii sau mari. În unele țări metoda PERT este utilizată chiar în întreprinderile mici; cît despre marile întreprinderi, acestea au servicii speciale cu sarcina de a aplica adesea cu ajutorul unor calculatoare electronice puternice, procedeele bazate pe această metodă. Sînt numai cîțiva ani de cînd sistemul PERT (Program Evaluation Research Task) a fost utilizat pentru realizarea programului de cercetare și de construire a cunoscutelor rachete Polaris; drumul parcurs de atunci este considerabil și nu mai există un număr al unei reviste de cercetare operațională sau de gestiune științifică care să nu cuprindă cel puțin un articol asupra acestui subiect, în care să nu fie propusă o nouă dezvoltare.

Propunem cititorilor acestei lucrări să continuie studierea problemelor de ordonanțare consultînd bibliografia existentă foarte bogată, atît asupra aspectelor teoretice, cît și asupra celor practice, care îi interesează. Din aceste eforturi vor rezulta importante economii de timp și de bani.

Cadrul în care se plasează activitățile omenești ale timpului nostru nu este numai spațial sau numai temporal; el este alcătuit din coordonate de spațiu și de timp, unde totul este mișcare și adaptare. Matematicienii și inginerii ne dau posibilitățile navigării în acest cadru. Să nu le îndepărtăm prin vanitatea intuiției noastre, intuiție prețioasă, dar pe care trebuie să o ajutăm și să o amplificăm prin procedee de investigație convenabile.

A. KAUFMANN și G. DESBAZEILLE

1

GRAFURI ȘI ORDONANȚARE

1.1. INTRODUCERE

Fără a face abuz de aspecte teoretice relative la cercetarea relațiilor ordinale ale unui graf, acesta nefiind altceva, după cum vom vedea, decît o mulțime de elemente între care există legături orientate, credem că este potrivit să amintim anumite noțiuni din teoria grafurilor și să arătăm cum se utilizează diverse procedee care permit realizarea unor relații ordinale. Ne vom limita la ceea ce este esențial pentru un studiu al procedeelor de ordonanțare care intervin în metoda drumului critic.

Vom defini mai întîi noțiunile de vîrf, arc, drum, circuit etc., apoi vom introduce noțiunea de ordine. Scopul acestui studiu preliminar este de a ne învăța să căutăm în ce ordine pot fi realizate operații despre care știm numai că unele trebuie să le preceadă pe altele.

1.2. NOȚIUNEA DE GRAF

Să considerăm o mulțime de elemente în număr finit, pe care le vom nota cu literele $X_1, X_2, \ldots, X_n$, mulțimea *) însăși notînd-o prin litera $\mathbf{X}$, și vom scrie simbolic:

$$\mathbf{X} = \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}. \tag{1.1}$$

*) Ne ocupăm aici numai de grafuri care au un număr finit de elemente; teoria grafurilor se ocupă și de cazul grafurilor care au un număr infinit de elemente.

Dacă fiecărui element X_i din mulţimea **X** îi corespund zero, unul sau mai multe elemente din **X**, se va forma, în sensul teoriei mulţimilor, un *graf*. Numind Γ legea care reprezintă corespondenţa considerată, vom utiliza pentru a reprezenta un graf simbolul

$$G = (\mathbf{X}, \Gamma). \tag{1.2}$$

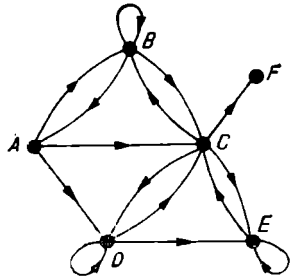


Fig. 1.1

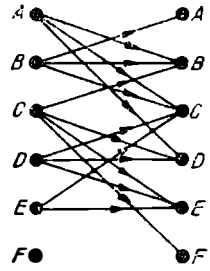


Fig. 1.2

Tabelul 1.1

	A	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*
A	0	1	1	1	0	0
B	1	1	1	0	0	0
C	0	1	0	1	1	1
D	0	0	1	1	1	0
E	0	0	1	0	1	0
F	0	0	0	0	0	0

Să considerăm un exemplu pentru a ilustra această definiţie, care ne va părea întrucîtva puţin mai abstractă. Fie o mulţime de şase elemente

$$\mathbf{X} = \{A, B, C, D, E, F\} \tag{1.3}$$

și să considerăm legea următoare de corespondență definită prin simbolul Γ:

$$\begin{aligned} &\Gamma A = \{B, C, D\}, \ \Gamma B = \{A, B, C\}, \ \Gamma C, = \{B, D, E, F\}. \\ &\Gamma D = \{C, D, E\}, \ \Gamma E = \{C, E\}, \qquad \Gamma F = \emptyset, \end{aligned} \tag{1.4}$$

unde simbolul Ø reprezintă mulțimea vidă care joacă în teoria mulțimilor rolul lui zero din numerație.

Un graf se poate reprezenta cu ajutorul unui desen ca acela din fig. 1.1, care se numește *reprezentarea sagitală a grafului*; el se poate reprezenta de asemenea ca în fig. 1.2, sau cu ajutorul unui tabel — matrice (tabelul 1.1).

În teoria mulțimilor se numește *graf* orice aplicație a unei mulțimi în ea însăși; simbolul Γ reprezintă această aplicație. *)

V î r f

Un element al unei mulțimi care formează un graf se numește *vîrf*. Pe fig. 1.1 elementele A, B, C, D, E și F sînt vîrfurile grafului. Un vîrf este numit de unii autori și *punct*.

A r c

O pereche orientată (X_i, X_j) de două vîrfuri X_i și X_j se numește *arc*. Astfel, în fig. 1.1: (A, B), (B, A), (A, C), (E, E), (C, F) sînt arce.

Se va nota prin **U** mulțimea arcelor; în exemplul dat avem:

$$\begin{aligned} \mathbf{U} = \{&(A, B), (A, C), (A, D), (B, A), (B, B), \\ &(B, C), (C, B), (C, D), (C, E), (C, F), \\ &(D, C), (D,D), (D, E), (E, C), (E, E)\}. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Un graf poate fi notat prin

$$G = (\mathbf{X}, \Gamma)$$

sau prin

$$G = (\mathbf{X}, \mathbf{U}).$$

*) Un graf este de fapt o pereche $(\mathbf{X}, \Gamma)$ unde $\mathbf{X}$ este o mulțime de elemente numite vîrfuri, iar Γ este o aplicație de la $\mathbf{X}$ în mulțimea părților lui $\mathbf{X}$ (N.R.).

D r u m

Este o succesiune de arce adiacente care permit să se treacă de la un vîrf la altul; astfel (A, B, C, F), (A, C, D, E, C, F), (A, B, A), (A, D), (A, B, B, C) sînt drumuri (fig. 1.1).

C i r c u i t

Este un drum al cărui vîrf iniţial coincide cu vîrful final. Astfel (A, C, B, A), (A, D, E, C, B, A), (A, C, B, A, C, B, A), (A, B, A), (B, B) sînt circuite (fig. 1.1).

B u c l ă

Este un arc pentru care originea şi extremitatea coincid; (B, B), (D, D) şi (E, E) sînt bucle (fig. 1.1).

L u n g i m e a u n u i d r u m s a u a u n u i c i r c u i t

Este numărul arcelor unui drum sau ale unui circuit. Astfel, lungimea drumului (A, B, C, F) este 3, aceea a circuitului (A, D, E, C, B, A) este 5.

M u c h i e

Cînd două vîrfuri distincte sînt unite prin cel puţin un arc într-un sens şi în altul, se spune că între ele există o muchie. Astfel, noţiunea de muchie este o noţiune *neorientată* a grafului.

De exemplu, în fig. 1.1: între A şi D există o muchie; între A şi B există o muchie; nu există muchie între B şi D.

O muchie se va nota $(\overline{A, D})$ sau $(\overline{A, B})$; mulţimea muchiilor se va nota prin $\overline{\mathbf{U}}$. Astfel, în exemplul nostru (fig. 1.1):

$$\overline{\mathbf{U}} = \{(\overline{A, B}), (\overline{A, C}), (\overline{A, D}), (\overline{B, C}), (\overline{C, D}), (\overline{C, E}), (\overline{C, F}), (\overline{D, E})\}. \quad (1.6)$$

L a n ţ

Este o succesiune de muchii adiacente, adică o succesiune de arce adiacente unde nu ţinem seama de orientarea arcelor. Astfel,

pe fig. 1.1 : (B, C, A, D, E) nu este un drum (din cauza arcului AC), însă este un lanț. Orice drum este evident și un lanț ; însă, reciproc. după cum am văzut, un lanț nu este totdeauna un drum .

Graf conex

Un graf este *conex* dacă între orice pereche de vîrfuri ale grafului există cel puțin un lanț. Graful din fig. 1.1 este conex.

Un graf este *tare conex* dacă între oricare pereche de vîrfuri există cel puțin un drum. Graful din fig. 1.1 nu este tare conex (nu există drumuri de la F către celelalte vîrfuri).

Graf antisimetric

Să considerăm mulțimea **U** a arcelor grafului ; dacă pentru orice arc (X_i, X_j) aparținînd lui **U** arcul (X_j,X_i) în sens invers nu aparține lui **U**, se spune că graful este *antisimetric.*

Rezultă din această definiție că un graf antisimetric nu are bucle. De exemplu, graful din fig. 1.3 este antisimetric.

Graf fără circuite

În prezenta lucrare ne vom ocupa în special de grafuri fără circuite, adică neconținînd nici un circuit, așa cum este cazul grafului din fig. 1.3.

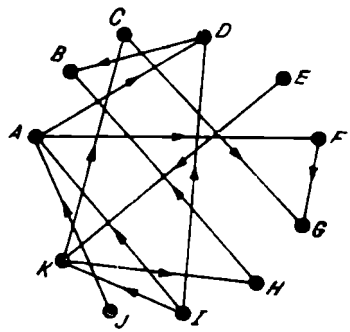


Fig. 1.3

Este evident că orice graf fără circuite este antisimetric, însă reciproca nu este adevărată.

Cititorul care cunoaște teoria grafurilor va fi uimit de faptul că ne limităm la așa de puține lucruri dintr-o teorie atît de amplă ; am amintit numai ceea ce este strict necesar pentru o prezentare logică a conceptelor pe care le vom introduce în metoda drumului critic, obiectul acestei cărți.

Tabelul 1.2

Matricea corespunzătoare grafului reprezentat în fig. 1.3. Zerourile nu au fost trecute în această matrice

	A	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*	*H*	*I*	*J*	*K*
A				1		1					
B											
C							1				
D		1									
E											1
F							1				
G											
H		1									
I	1			1							1
J	1										
K			1					1			

1.3. RELAŢIA DE ORDINE STRICTĂ ÎNTR-UN GRAF CONEX FĂRĂ CIRCUITE

Să considerăm relaţia următoare între două vîrfuri distincte X_i şi X_j ale unui graf conex fără circuite : *există un drum de lungime nenulă de la* X_i *spre* X_j, pe care o vom nota $X_i < X_j$.

Această relaţie are următoarele proprietăţi :

1) Relaţia este antisimetrică ; $X_i < X_j$ implică că nu putem avea $X_j < X_i$ deoarece ar exista un circuit.

2) Relaţia este tranzitivă ; dacă $X_i < X_j$ şi $X_j < X_k$, atunci $X_i < X_k$, ceea ce este evident, dacă considerăm definiţia unui drum.

În acest mod, în orice graf conex şi fără circuite este posibil să se considere o relaţie de ordine strictă, plecînd de la proprietatea : există un drum de la X_i spre X_j ; X_i se numeşte *antecedent* al lui X_j şi X_j se numeşte *descendent* al lui X_i, dacă există un drum de la X_i la X_j.

Exemplu (fig. 1.3)

I este un antecedent al lui B: $I < B$.
G este un descendent al lui I: $I < G$.

Ne vom ocupa acum de următoarea problemă particulară, însă foarte importantă: să se împartă vîrfurile unui graf conex şi fără circuite în nivele*) plecînd dintr-un vîrf arbitrar astfel ca:

a) toate elementele aceluiaşi nivel să nu aibă antecedenţi în nivelul următor; elementele primului nivel să nu aibă antecedenţi şi cele ale ultimului nivel să nu aibă descendenţi;

b) ordinea vîrfurilor din acelaşi nivel să fie indiferentă, adică aceste vîrfuri să nu fie legate între ele prin arce.

Pentru orice vîrf considerat, descompunerea în asemenea nivele există întotdeauna. Metoda folosită pentru determinarea lor ne va dovedi acest lucru mai departe.

1.4. DESCOMPUNEREA UNUI GRAF CONEX FĂRĂ CIRCUITE ÎN NIVELE

1.4.1. CUM SE ORDONEAZĂ NIVELELE

Să reluăm exemplul din fig. 1.3: este posibil să fie descompus graful, astfel încît să apară patru nivele (fig. 1.4), fiecare nivel conţinînd vîrfuri care nu au între ele nici un arc; cum a fost obţinut acest rezultat? Vom prezenta două metode.

Prima metodă **)

Să considerăm matricea care reprezintă graful din fig. 1.3, matrice reprezentată prin tabelul 1.2. Să notăm $\vec{V}_A$, $\vec{V}_B$, $\vec{V}_C$, ..., $\vec{V}_K$ vectorii care reprezintă coloanele acestei matrice. Să calculăm:

$$\vec{V}_0 = \vec{V}_A + \vec{V}_B + \ldots + \vec{V}_K$$

*) Aceste nivele definesc valorile unei funcţii ordinale a grafului. În mod intenţionat lăsăm la o parte aici noţiunea de funcţie ordinală; ea l-ar antrena pe cititor spre un studiu mai aprofundat al teoriei grafurilor, în mod disproporţional cu obiectivele prezentei lucrări.

**) Această metodă este datorată lui Demoucron, inginer la Compania de maşini Bull.

şi să trecem acest rezultat în dreapta matricei, aşa cum ne arată tabelul 1.3. Acest vector $\vec{V}_0$ conţine un anumit număr de zerouri

Tabelul 1.3

	A	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*	*H*	*I*	*J*	*K*	$\vec{V}_0$	$\vec{V}_1$	$\vec{V}_2$	$\vec{V}_3$
A				1		1						2	2	0	×
B												0	×	×	×
C							1					1	0	×	×
D		1										1	0	×	×
E											1	1	1	1	0
F							1					1	0	×	×
G												0	×	×	×
H		1										1	0	×	×
I	1			1							1	3	3	2	0
J	1											1	1	1	0
K			1					1				2	2	0	×
Nivelul												0	1	2	3
Vîrfurile												*B* *G*	*C* *D* *F* *H*	*A* *K*	*E* *I* *J*

şi anume două, care corespund vîrfurilor B şi G, ceea ce înseamnă că aceste două vîrfuri nu au descendenţi : ele vor fi de nivel 0.

Acum să calculăm vectorul

$$\vec{V}_1 = \vec{V}_0 - \vec{V}_B - \vec{V}_G,$$

în care vor apărea patru zerouri noi, corespunzînd vîrfurilor C, D, F, H, care vor fi numite de nivel 1.

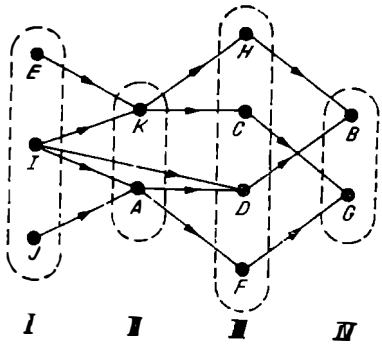


Fig. 1.4

Apoi să calculăm

$$V_2 = \vec{V}_1 - \vec{V}_C - \vec{V}_D - \vec{V}_F - \vec{V}_K,$$

unde apar două zerouri noi, corespunzînd vîrfurilor A şi K, care se vor numi de nivel 2.

În fine, să calculăm

$$\vec{V}_3 = \vec{V}_2 - \vec{V}_A - \vec{V}_K,$$

unde apar trei zerouri noi, corespunzînd vîrfurilor E, I şi J, care se vor numi de nivel 3. Ne vom opri aici, deoarece $\vec{V}_3$ nu este format decît din zerouri.

Pentru a demonstra proprietatea utilizată, este suficient să remarcăm că în fiecare etapă de calcul se caută vîrfurile fără descendenţi *).

O numerotare în sens invers va da ordinea I, II, III şi IV, reprezentată în fig. 1.4.

La fel de bine se poate lua transpusa **) matricei date de tabelul 1.3 şi să se procedeze în sens invers, căutînd vîrfurile care nu au antecedenţi. Vom găsi o altă mulţime de nivele, care poate fi aceeaşi în anumite cazuri particulare, ca aceea obţinută căutînd vîrfurile care nu au descendenţi.

Alt exemplu

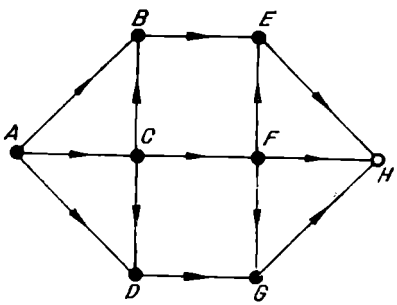


Fig. 1.5

Fie graful din fig. 1.5. În tabelul 1.4. a fost trecută mai întîi matricea care reprezintă acest graf, apoi s-a calculat succesiv :

$$\vec{V}_0 = \vec{V}_A + \vec{V}_B + \ldots + \vec{V}_H,$$

$$\vec{V}_1 = \vec{V}_0 - \vec{V}_H,$$

*) În calculele făcute cu ajutorul unui echipament electronic, este convenabil să se plaseze cifra 1 pe diagonala principală a matricei booleene pentru a distinge zerourile de $\times$; zerourile devin atunci unităţi şi $\times$ devin zerouri.

**) Adică matricea obţinută permutînd liniile cu coloanele de acelaşi indice.

$$\vec{V}_2 = \vec{V}_1 - \vec{V}_E - \vec{V}_G,$$

$$\vec{V}_3 = \vec{V}_2 - \vec{V}_B - \vec{V}_D - \vec{V}_F,$$

$$\vec{V}_4 = \vec{V}_3 - \vec{V}_C.$$

Tabelul 1.4

	A	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*	*H*	$\vec{V}_0$	$\vec{V}_1$	$\vec{V}_2$	$\vec{V}_3$	$\vec{V}_4$
A		1	1	1					3	3	3	1	0
B					1				1	1	0	×	×
C		1		1		1			3	3	3	0	×
D							1		1	1	0	×	×
E								1	1	0	×	×	×
F					1		1	1	3	2	0	×	×
G								1	1	0	×	×	×
H									0	×	×	×	×
Nivelul									0	1	2	3	4
Vîrfurile									*H*	*E* *G*	*B* *D* *F*	*C*	*A*

Cele cinci nivele obţinute sînt reprezentate în fig. 1.6.

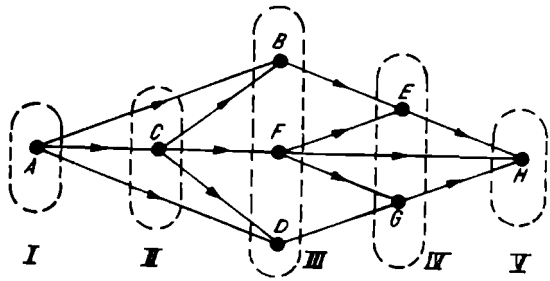


Fig. 1.6

Metoda a doua

Pentru explicarea acestei metode vom defini mai întîi *închiderea tranzitivă a unui vîrf al unui graf.*

Se numeşte închidere tranzitivă a unui vîrf X_i al unui graf submulţimea vîrfurilor grafului, inclusiv X_i însuşi, pentru care există un drum de la X_i către fiecare din ele. Dacă considerăm de exemplu, pe fig. 1.3 vîrful K, închiderea tranzitivă a lui K este $\{K, H, C, B, G\}$.

Pentru obţinerea închiderii tranzitive a fiecăruia dintre vîrfurile unui graf se consideră matricea sa reprezentativă, la care se vor adăuga în prealabil unităţi pe diagonala principală şi o vom înmulţi cu ea însăşi după regulile obişnuite ale calculului matriceal apoi, în matricea obţinută se înlocuiesc toate numerele mai mari sau egale cu 1 prin 1 şi nu se modifică zerourile obţinute. Această matrice ne indică vîrfurile care sînt legate cu altele printr-un drum de lungime 0, 1 sau 2. O vom înmulţi la rîndul ei prin ea însăşi şi numerele mai mari sau egale cu 1 vor fi înlocuite prin 1; ea ne va da vîrfurile care sînt legate cu celelalte printr-un drum de lungime inferioară sau egală cu 4. Se va continua pînă ce nu mai apar noi cifre egale cu 1; astfel se va găsi matricea care dă închiderea tranzitivă a fiecărui vîrf.

Înainte de a trece la etapa a doua de calcul, să arătăm cum se lucrează pe un exemplu. Să-l reluăm pe acela din fig. 1.5; nu vom reprezenta zerourile şi vom lăsa căsuţele lor goale.

	A	B	C	D	E	F	G	H
A	1	1	1	1				
B		1			1			
C		1	1	1		1		
D				1			1	
E					1			1
F					1	1	1	1
G							1	1
H								1

•

	A	B	C	D	E	F	G	H
A	1	1	1	1				
B		1			1			
C		1	1	1		1		
D				1			1	
E					1			1
F					1	1	1	1
G							1	1
H								1

=

	A	B	C	D	E	F	G	H
A	1	3	2	3	1	1	1	
B		1			2			1
C		2	1	2	2	2	2	1
D				1			2	1
E					1			2
F					2	1	2	4
G							1	2
H								1

(1.7)

înlocuită prin

	A	B	C	D	E	F	G	H
A	1	1	1	1	1	1	1	
B		1			1			1
C		1	1	1	1	1	1	1
D				1			1	1
E					1			1
F					1	1	1	1
G							1	1
H								1

(1.8)

Matricea (1.8) va fi ridicată, la rîndul său, la puterea 2.

	A	B	C	D	E	F	G	H
A	1	1	1	1	1	1	1	
B		1			1			1
C		1	1	1	1	1	1	1
D				1			1	1
E					1			1
F					1	1	1	1
G							1	1
H								1

•

	A	B	C	D	E	F	G	H
A	1	1	1	1	1	1	1	
B		1			1			1
C		1	1	1	1	1	1	1
D				1			1	1
E					1			1
F					1	1	1	1
G							1	1
H								1

=

	A	B	C	D	E	F	G	H
A	1	3	2	3	5	3	5	6
B		1			2			3
C		2	1	2	4	2	4	7
D				1			2	3
E					1			2
F					2	1	2	4
G							1	2
H								1

(1.9)

înlocuită prin

	A	B	C	D	E	F	G	H
A	1	1	1	1	1	1	1	1
B		1			1			1
C		1	1	1	1	1	1	1
D				1			1	1
E					1			1
F					1	1	1	1
G							1	1
H								1

(1.10)

Matricea (1.10) va fi ridicată, la rîndul său, la puterea 2; însă vom constata, înlocuind numerele mai mari sau egale cu 1 prin unităţi, că regăsim (1.10). Această matrice dă închiderea tranzitivă a fiecărui vîrf (se putea evalua prin citire directă pe graf, însă pentru anumite grafuri mai complicate se vor întîmpina cu siguranţă unele dificultăţi, pentru a se putea opera prin citire directă).

Acum, în matricea care dă închiderea tranzitivă, vom căuta liniile care conţin numai un singur 1; elementele corespunzătoare vor fi numite de nivel 0. Liniile şi coloanele care corespund elementelor de nivel zero vor fi eliminate şi se va repeta pe submatricea obţinută prin eliminarea liniilor şi coloanelor care conţin un singur număr 1, ş.a.m.d.

	A	B	C	D	E	F	G	H	
A	1	1	1	1	1	1	1	1	
B		1			1			1	
C		1	1	1	1	1	1	1	
D				1			1	1	
E					1			1	
F					1	1	1	1	
G							1	1	
H								1	←

nivelul 0

	A	B	C	D	E	F	G	
A	1	1	1	1	1	1	1	
B		1			1			
C		1	1	1	1	1	1	
D				1			1	
E					1			←
F					1	1	1	
G							1	←

nivelul 1

	A	B	C	D	E	
A	1	1	1	1	1	
B		1				←
C		1	1	1	1	
D				1		←
E					1	←

nivelul 2

	A	C	
A	1	1	
C		1	←

nivelul 3

	A	
A	1	←

nivelul 4

Săgeţile indică elementele nivelului considerat.

Justificarea metodei folosite este evidentă. La fiecare iteraţie se elimină vîrfurile fără descendenţi. Această metodă este mai complicată decît prima, ea justificîndu-se cînd calculele închiderii tranzitive sînt simple.

1.4.2. DETERMINAREA NIVELELOR PE DESENUL UNUI GRAF

Calculele prezentate în legătură cu cele două metode date mai înainte pot fi făcute direct pe desenul grafului, ceea ce este uneori mai comod.

Să examinăm pe un exemplu cum se operează (fig. 1.7).

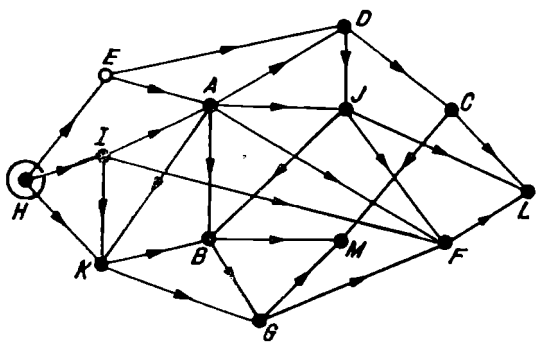


Fig. 1.7

Să căutăm vîrfurile care n-au antecedenţi. Există unul singur şi anume H, care va forma nivelul I. Să suprimăm vîrful H şi pe graful obţinut, după suprimarea punctului H şi a arcelor care ies din H (fig. 1.8) să căutăm vîrfurile care nu au antecedenţi; acestea sînt E şi I. Să suprimăm vîrfurile E şi I care formează nivelul II şi să suprimăm de asemenea arcele care ies din E şi I. Vom obţine graful din fig. 1.9. Vom continua în acelaşi mod pînă la epuizarea tuturor arcelor.

Această descompunere în nivele este dată în fig. 1.15. Pe fig. 1.16 s-a reprezentat o altă descompunere obţinută prin eliminarea descendenţilor plecînd de la punctele terminale L şi M.

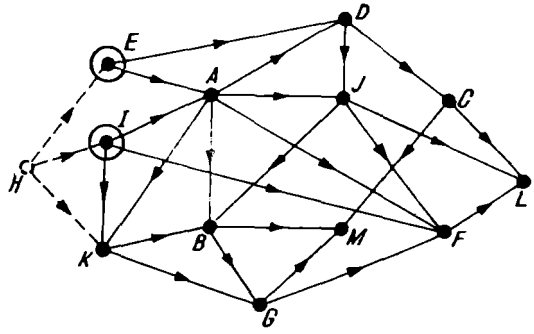


Fig. 1.8

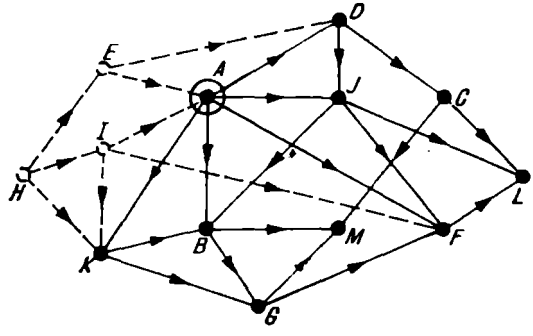


Fig. 1.9

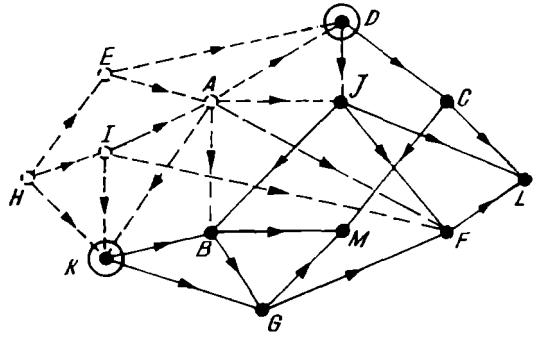


Fig. 1.10

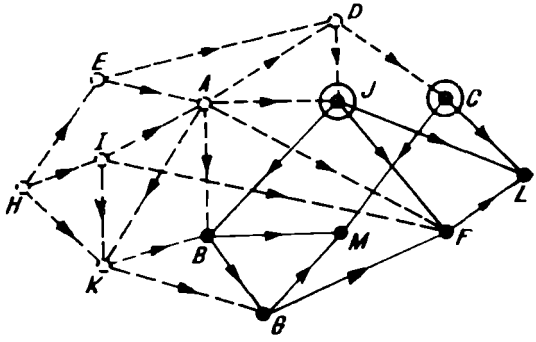


Fig. 1.11

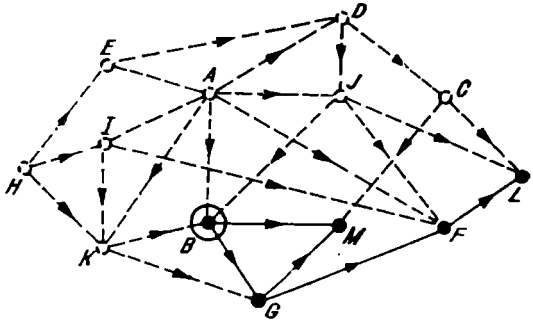


Fig. 1.12

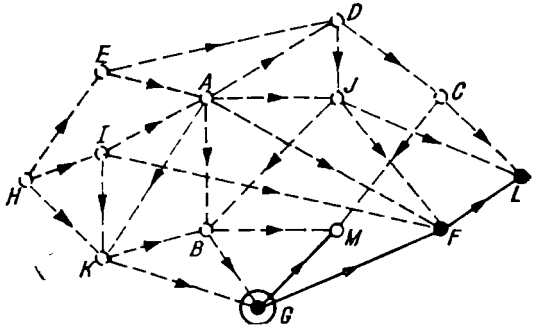


Fig. 1.13

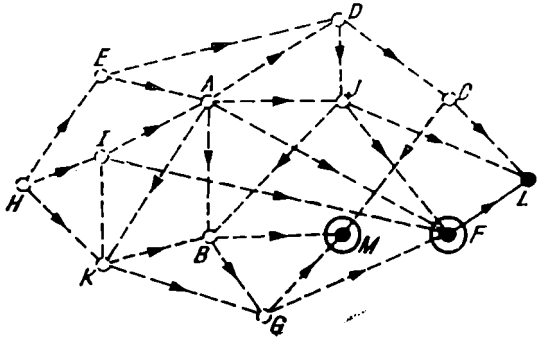


Fig. 1.14

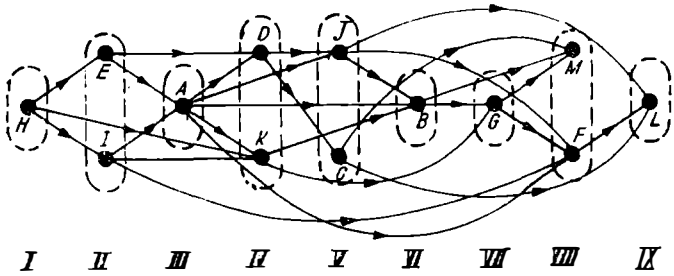


Fig. 1.15 Nivele obținute prin eliminarea antecedenților.

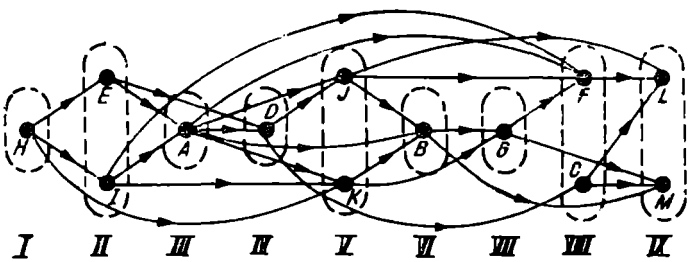


Fig. 1.16 Nivele obținute prin eliminarea descendenților.

1.4.3. CUM SE ORDONEAZĂ ARCELE

Pentru a ordona arcele, adică pentru a descompune mulțimea arcelor în nivele, pot fi utilizate metodele precedente, după o modificare convenabilă. Vom relua exemplul din fig. 1.5 pe care am reprodus-o în fig. 1.17, după ce am notat arbitrar arcele cu litere latine mici. Pentru a urmări calculele se va utiliza fie matricea dată în tabelul 1.5, fie cele trei figuri 1.18, 1.19 și 1.20.

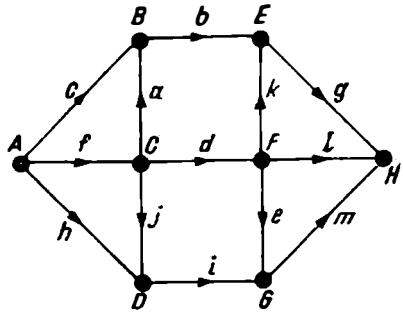


Fig. 1.17

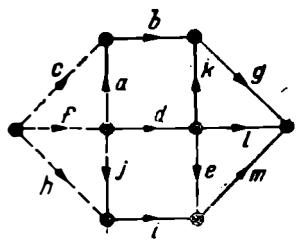


Fig. 1.18

Arcele c, f și h nu au antecedenți; ele vor forma nivelul I în coloana $\vec{V}_0$, corespunzînd zerourilor acestei coloane. Coloana $\vec{V}_1$ va fi obținută prin relația

$$\vec{V}_1 = \vec{V}_0 - \vec{V}_c - \vec{V}_f - \vec{V}_h.$$

Se găsesc astfel arcele *b* şi *i* care nu au antecedenţi dacă *c*, *f* şi *h* sînt scoase ş.a.m.d.

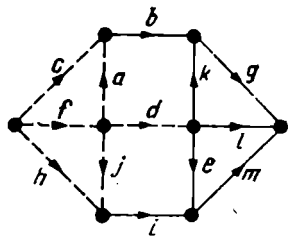


Fig. 1.19

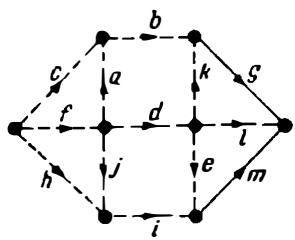


Fig. 1.20

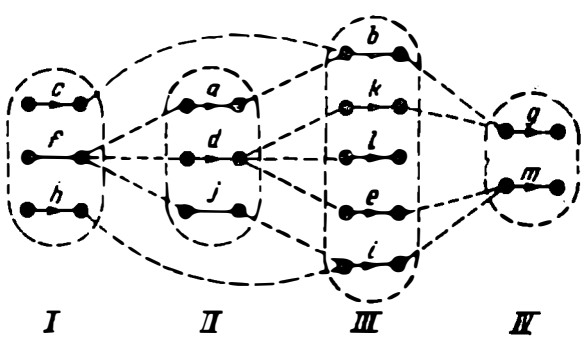


Fig. 1.21

Se va observa că descompunerea în nivele a mulţimii arcelor depinde de vîrful de la care a fost începută.

Pe fig. 1.21 s-a reprezentat rezultatul calculelor pe care le-am făcut cu ajutorul matricei din tabelul 1.5.

Tabelul 1.5

	a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*	*i*	*j*	*k*	*l*	*m*	$\vec{V}_0$	$\vec{V}_1$	$\vec{V}_2$	$\vec{V}_3$
a						1								1	0	×	×
b	1		1											2	1	0	×
c														0	×	×	×
d						1								1	0	×	×
e				1										1	1	0	×
f														0	×	×	×
g		1									1			2	2	2	0
h														0	×	×	×
i								1		1				2	1	0	×
j						1								1	0	×	×
k				1										1	1	0	×
l				1										1	1	0	×
m					1				1					2	2	2	0

1.5. GĂSIREA UNEI ORDONANŢĂRI *)

1.5.1. ORDONANŢARE DE VÎRFURI

Vom spune că într-un graf conex fără circuite, am realizat o *ordonanţare a vîrfurilor* dacă am construit un şir al tuturor vîrfurilor grafului care satisfac toate condiţiile de anterioritate definite de arcele grafului. Un astfel de şir nu este deci altceva, decît o permutare a vîrfurilor satisfăcînd toate condiţiile de anterioritate. Pentru a construi o ordonanţare a vîrfurilor este suficient să alegem vîrfurile respectînd ordinea nivelelor definite în 1.4.

Exemple

1. În figurile 1.3 şi 1.4 :

$E\,J\,I\,K\,A\,C\,D\,H\,F\,B\,G$, $I\,J\,E\,A\,K\,H\,C\,F\,D\,G\,B$ sînt ordonanţări ale vîrfurilor grafului.

2. În figurile 1.7, 1.15 şi 1.16 :

$H\,E\,I\,A\,K\,D\,J\,C\,B\,G\,F\,M\,L$ (fig. 1.15)

şi

$H\,E\,I\,A\,D\,K\,J\,B\,C\,F\,L\,M$ (fig. 1.16)

sînt ordonanţări ale vîrfurilor grafului din fig. 1.7.

Vom observa că procedeele pe care le-am descris pentru a găsi nivelele nu ne permit, aşa cum sînt date, de a enumera toate permutările care satisfac condiţiile de anterioritate date de graf. Pentru ceea ce ne preocupă în lucrarea aceasta, o astfel de enumerare nu prezintă interes, ea putînd prezenta totuşi un interes evident în alte probleme sau alte metode.

1.5.2. ORDONANŢAREA ARCELOR

Considerînd un graf conex fără circuite, vom spune că am realizat o *ordonanţare a arcelor* dacă am construit un şir din toate arcele,

*) S-au dat acestui cuvînt tot felul de semnificaţii ; sensul dat aici va fi mai restrîns, dar mai precis. În afară de 2.6 unde cuvîntul ordonanţare va fi utilizat în sensul mai tehnic, dat de obicei de către planificatori şi organizatori, noi vom rezerva acestui cuvînt semnificaţia matematică dată mai sus.

satisfăcînd toate condițiile de anterioritate ale arcelor, unele în raport cu celelalte. Un astfel de șir nu este altceva decît o permutare a arcelor care satisfac toate condițiile de anterioritate ale arcelor. Pentru a construi o astfel de ordonanțare este suficient de a alege arcele, respectînd ordinea nivelelor arcelor definite în paragraful precedent.

Exemplu (fig. 1.17 și fig. 1.21)

c h f d j a k b l e i m g și *h c f a d j b k l i e g m*

sînt ordonanțări ale arcelor grafului din fig. 1.17.

1.5.3. ORDONANȚAREA COMPLETĂ A UNUI GRAF CONEX FĂRĂ CIRCUITE

Se va spune că s-a realizat o ordonanțare completă a unui astfel de graf dacă, după ce s-au desemnat simbolurile pentru reprezentarea vîrfurilor și simbolurile pentru reprezentarea arcelor, s-a realizat pe de o parte o ordonanțare a vîrfurilor și pe de altă parte o ordonanțare a arcelor.

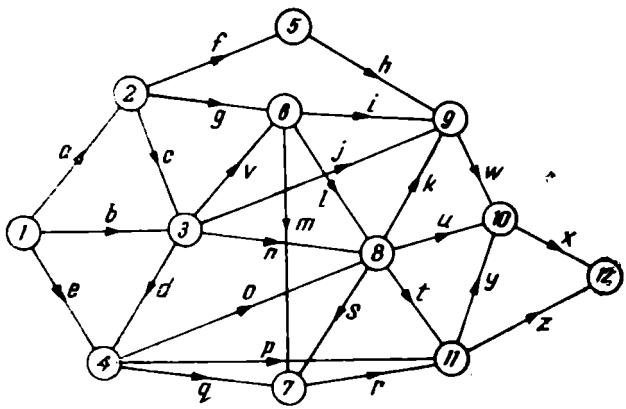


Fig. 1.22

Exemplu

Să considerăm graful fără circuite din fig. 1.22. Am arătat cum se determină nivelele; o ordonanțare a vîrfurilor va fi, de

exemplu :

1, 2, 3, 6, 4, 8, 5, 7, 11, 9, 10, 12.

Tabelul 1.6

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1		1	1	1								
2			1		1	1						
3				1		1		1	1			
4							1	1			1	
5									1			
6							1	1	1			
7											1	
8							1		1	1	1	
9										1		
10												1
11										1		1
12												

$\vec{V}_0$	$\vec{V}_1$	$\vec{V}_2$	$\vec{V}_3$	$\vec{V}_4$	$\vec{V}_5$	$\vec{V}_6$	$\vec{V}_7$	$\vec{V}_8$
3	3	3	3	3	3	2	1	0
3	3	3	3	2	2	1	0	×
4	4	4	3	3	2	0	×	×
3	3	3	2	1	0	×	×	×
1	1	1	0	×	×	×	×	×
3	3	3	2	1	0	×	×	×
1	1	1	0	×	×	×	×	×
4	4	3	1	0	×	×	×	×
1	1	0	×	×	×	×	×	×
1	0	×	×	×	×	×	×	×
2	1	0	×	×	×	×	×	×
0	×	×	×	×	×	×	×	×
12	10	9 11	5 6	8	4 6	3	2	1

Rămîne de găsit o ordonanţare a arcelor. Operînd ca mai înainte, la 1.4, cititorul va găsi uşor cum a fost obţinută fig. 1.24 prin eliminarea progresivă a arcelor fără antecedenţi. O ordonanţare a arcelor va fi, de exemplu :

a e b c f g h j n d v m i l o p q k s u t r w z y x.

În anumite cazuri ne va interesa o descompunere a nivelelor în subnivele, unde sînt grupate arcele avînd acelaşi vîrf ca origine (fig. 1.25). Algoritmul dat în 1.4. pentru determinarea unei ordonanţări a arcelor va fi uşor modificat în scopul obţinerii de subnivele ale arcelor avînd o origine comună.

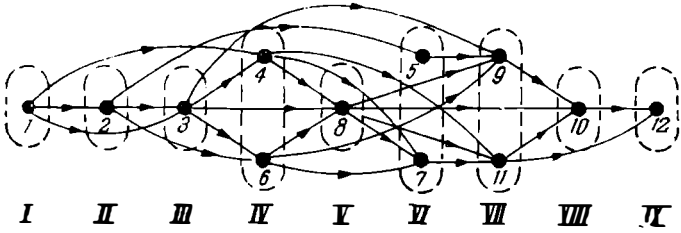


Fig. 1.23

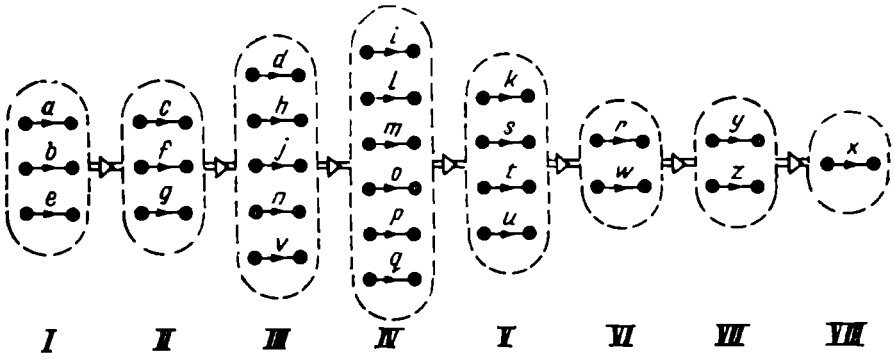


Fig. 1.24

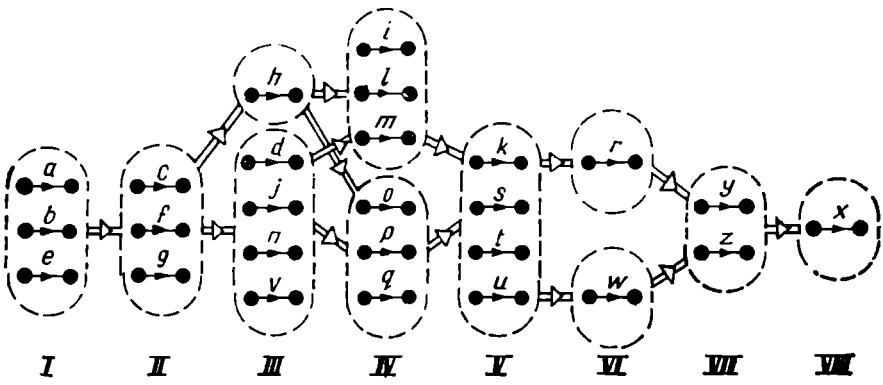


Fig. 1.25

1.5.4. UTILITATEA STUDIULUI UNEI ORDONANŢĂRI COMPLETE

După cum se va vedea mai departe, va trebui să ne preocupăm de programe cuprinzînd operaţii foarte diferite şi adesea date şi specificate „de-a valma" fără a se şti bine care sînt acelea care trebuie să se plaseze înaintea altora, cunoscîndu-se numai anumite antecedente obligatorii. De fapt este vorba, în primul rînd, de a construi graful reprezentînd relaţiile cunoscute din program, adică antecedentele; acest lucru fiind făcut, se întreprind apoi alte cercetări importante. Scopul acestui prim capitol a fost tocmai de a arăta cum se poate construi graful reprezentativ şi cum se pot numerota convenabil vîrfurile şi arcele. Anumite programe formează grafuri avînd mai multe mii de vîrfuri şi mai multe mii de arce, iar tratarea lor la calculatorul electronic implică mai întîi cunoaşterea unei ordonanţări complete. Este un principiu de organizare după care ne conducem în astfel de consideraţii: tot ceea ce poate fi ordonat trebuie să fie ordonat.

Vom examina acum grafuri în care sînt afectate arcelor valori numerice (intervale de timp, termene etc.).

2

STABILIREA UNUI PROGRAM DE CERCETARE SAU DE PRODUCȚIE

2.1. INTRODUCERE

Vom arăta în acest capitol cum se stabileşte graful unui program de cercetare, de dezvoltare, sau de producţie. Apoi, prin calculul drumului critic vom deduce timpul de realizare a ansamblului de lucrări, intervalele de variaţie şi marginile operatorii, acestea în cazul cînd operaţiile au durate bine determinate. Vom avea în vedere, mai departe, cazul în care variabilele reprezentînd duratele operaţiilor sînt aleatoare, ceea ce constituie cazul considerat în metoda PERT propriu-zisă.

Vom da diverşi algoritmi permiţînd calcularea drumului sau drumurilor critice şi diverselor abateri cărora li se ataşează o mare importanţă. În sfîrşit, vom vorbi de tratarea acestor programe cu ajutorul calculului electronic.

2.2. REPREZENTAREA UNUI PROGRAM PRINTR-UN GRAF

2.2.1. GENERALITĂŢI

În ceea ce va urma, vom numi *program* o mulţime de *operaţii* care conduc la realizarea unui obiectiv (proiect, mare ansamblu etc.), astfel încît se cunosc pentru fiecare dintre operaţii durata sa (determinată sau aleatoare) şi relaţiile de ordine privitoare la aceasta (antecedente obligatorii).

Un program poate fi reprezentat printr-un graf, numit *graf de program* sau *graf de ordonanțare*, ale cărui arce reprezintă operațiile ; duratele operațiilor sau *timpii operatori* fiind presupuși cunoscuți, se va atașa arcelor grafului o valoare nenegativă *) reprezentînd fiecare din acești timpi operatori. Vîrfurile grafului, numite *evenimente* și notate E_i, pot fi interpretate ca indicînd realizarea obiectivelor parțiale (montarea unui subansamblu, de exemplu). Dacă finețea analizei (operații din ce în ce mai simple și cu durate din ce în ce mai scurte) este foarte mare, evenimentele considerate pierd mult din semnificația lor practică, îndeosebi unele dintre ele, care indică marile etape ale proiectului. Durata operației P_{ij}, care este una din operațiile contribuind la realizarea evenimentului E_j, va fi notată t_{ij}. Figura 2.1 reprezintă un program.

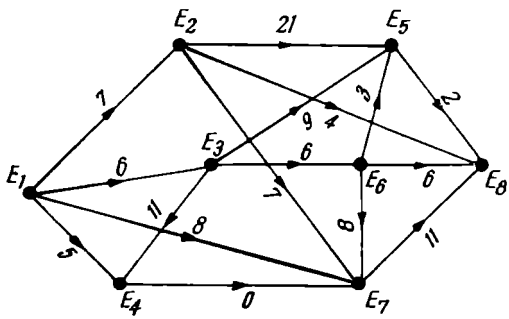


Fig. 2.1.

Stabilirea grafului necesită pentru fiecare operație cunoașterea operațiilor care o preced imediat. Graful traduce astfel relațiile de ordine existente în mulțimea operațiilor ; el constituie o reprezentare a ceea ce unii numesc *ordonanțare* **). Se va observa că unei aceleiași ordonanțări a operațiilor, deci aceluiași graf, îi pot corespunde mai multe programe diferite, dacă timpii operatori sînt diferiți.

Se va observa că graful unui program este *fără circuite*, altfel o operație ar putea fi făcută să urmeze ei însăși.

*) Cum se va vedea mai departe, va fi totuși posibil să luăm în considerație valori negative.

**) Alți autori numesc *ordonanțare* programul însuși.

Primul lucru de îndeplinit în vederea aplicării metodei drumului critic va fi, astfel, întocmirea unei liste de operaţii care va fi subdivizată, mai mult sau mai puţin, în raport cu precizia dorită.

Ne vom strădui să alegem operaţii cît mai simple, pentru care timpii operatori să fie de valori comparabile. Apoi se vor determina antecedentele fiecăreia dintre operaţii. Această parte numită *analiză de lucru* este cea mai importantă şi adesea cea mai lungă. Ea necesită colaborarea strînsă a întregului personal (ingineri, contramaiştri, muncitori) interesat în realizarea pe care vrem să o întreprindem şi care se dovedeşte foarte utilă ca atare.

Pentru a concretiza, vom examina un exemplu, acela al construcţiei unei vile. Pentru a construi o vilă este necesar un anumit număr de operaţii pe care le enumerăm într-o anumită ordine:

a) elaborarea planurilor;
b) obţinerea autorizaţiei de construire;
c) semnarea contractului;
d) transportarea materialului la şantier (agregate, piatră de construcţie, cărămizi...);
e) executarea racordurilor electrice şi de apă pentru şantier;
f) executarea fundaţiilor;
g) executarea lucrărilor de zidărie portantă;
h) executarea şarpantelor;
i) executarea acoperişului;
j) executarea pardoselilor;
k) executarea pereţilor despărţitori din cărămizi uşoare;
l) executarea instalaţiilor de încălzire centrală, gaze;
m) executarea instalaţiilor electrice interioare;
n) montarea tocurilor;
o) tencuirea pereţilor;
p) executarea a două şemineuri în piatră;
q) montarea obiectelor sanitare şi a bucătăriei;
r) executarea lucrărilor în ipsos;
s) montarea prizelor şi a întreruptoarelor electrice;
t) montarea uşilor şi a ferestrelor;
u) executarea zugrăvelilor şi a tapetelor;
v) montarea centralei termice şi a radiatoarelor;
w) transportarea pămîntului pentru grădină;
x) montarea contoarelor şi executarea branşamentelor pentru energie electrică, gaze, telefon, apă;

y) curăţirea şantierului;
z) recepţia provizorie.

Să numim E_1 evenimentul iniţial sau începutul lucrărilor şi să numim E_2 evenimentul cînd contractul poate fi semnat. Între E_1 şi E_2 se găsesc două operaţii: elaborarea planurilor şi obţinerea autorizaţiei de construire. Dacă regulamentul administrativ prevede că nu se poate acorda o autorizaţie de construire fără a avea planurile, cum se întîmplă în general, vom aşeza între E_1 şi E_2 un eveniment E_3: planurile sînt terminate. După evenimentul E_2, se vor putea întreprinde simultan operaţiile e şi c, cu timpii operatori t_{24} şi t_{25}; într-adevăr, racordurile electrice şi de apă nu sînt în general făcute de antreprenor. Evenimentul E_5 constă în semnarea contractului; se poate atunci întreprinde operaţia d, de timp operator t_{54}. Operaţia f, de timp operator t_{46}, se va plasa după evenimentul E_4 pentru că într-adevăr ea nu poate începe decît după îndeplinirea operaţiilor d şi e. Lăsăm cititorului sarcina să continue construcţia grafului apărut în fig. 2.2., făcînd anumite ipoteze care i se vor părea apropiate de realitate sau consultînd eventual un prieten arhitect. Cititorul să nu caute o interpretare a evenimentului E_7 aşezat în fig. 2.2 pentru a uşura urmărirea expunerii. Într-o problemă ca cea a construirii unei vile, duratele operaţiilor sînt în general aleatoare; după cum am mai spus, va trebui să precizăm cum vor fi determinate şi cum vor fi utilizate astfel de variabile aleatoare.

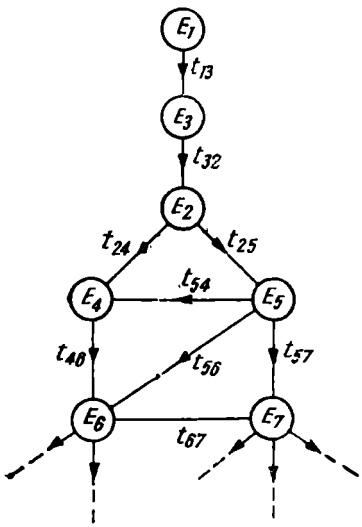


Fig. 2.2.

Reprezentarea unui program cu ajutorul unui graf poate fi făcută altfel. Nu vom mai reprezenta printr-un vîrf un eveniment, ci o operaţie determinată, şi vom folosi un arc pentru a reprezenta ordinea în care două operaţii Q_{ij} şi Q_{jk} trebuie să urmeze una alteia, astfel încît să fie posibil de dat un răgaz între începerea lui Q_{ij} şi aceea a lui Q_{jk}. În această reprezentare este convenabil a numi *sarcini* operaţiile considerate înainte şi *restricţii* arcele cărora le sînt

afectate valorile de răgaz sau de întîrziere. Figura 2.3 dă graful corespunzător celui din fig. 2.2. după ce a fost astfel retranspus.

Pentru a face să apară mai simplu trecerea de la o reprezentare la alta, prezentăm un alt exemplu în figurile 2.4—2.6. Cum se vede în figurile 2.5 și 2.6, este convenabil să adăugăm două sarcini D și F reprezentînd începutul și sfîrșitul programului. Din figura 2.6 se vede că sarcina g se plasează după sarcinile b și d; între g și b există o restricție : g nu poate începe dacă nu s-a scurs un timp egal cu 6 de la începerea lui b; între g și d există o restricție : g nu poate începe dacă nu s-a scurs un timp egal cu 4 de la începerea lui d. De altfel, sarcinile d, f și e nu pot începe decît cu 3 unități de timp după începerea lui a.

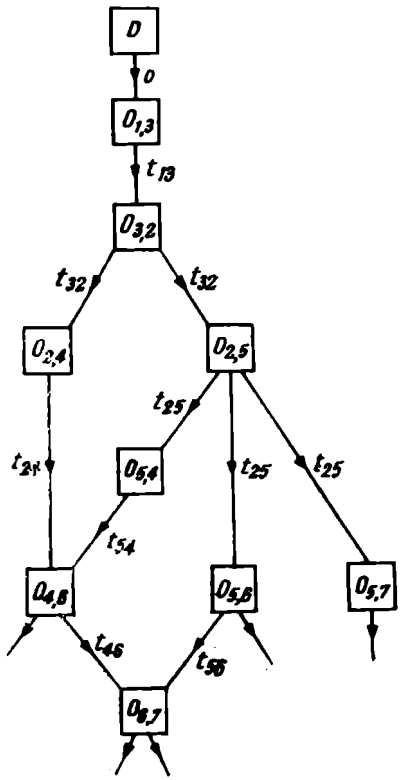


Fig. 2.3

Cele două reprezentări au respectiv avantaje și inconveniente. Va fi convenabilă alegerea uneia sau alteia în funcție de natura problemei al cărei program se construiește. Se va observa, totuși, că reprezentarea prin sarcini și restricții permite introducerea de noi restricții la un program, sau modificarea relațiilor de ordine dintre sarcini, prin simpla adăugare de arce, fără a se modifica complet graful.

Americanii au folosit în sistemul PERT reprezentarea cu evenimente și operații. În Franța, mai ales după publicarea lucrărilor lui B. Roy *), se folosește de preferință reprezentarea cu sarcini și restricții, iar metoda corespunzătoare a fost numită de B. Roy *metoda potențialelor*.

*) Multe figuri din acest paragraf au fost luate din articolul lui B. Roy [12].

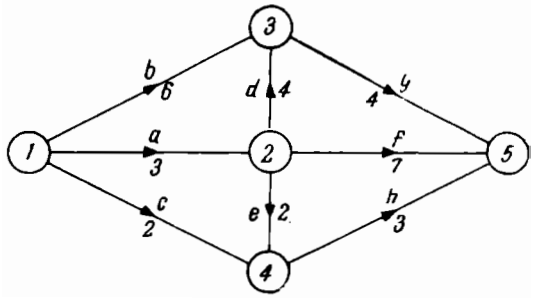


Fig. 2.4.

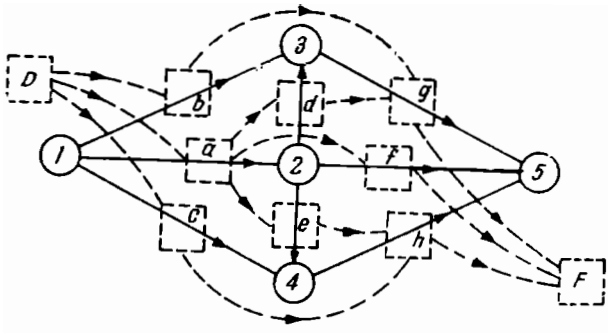


Fig. 2.5.

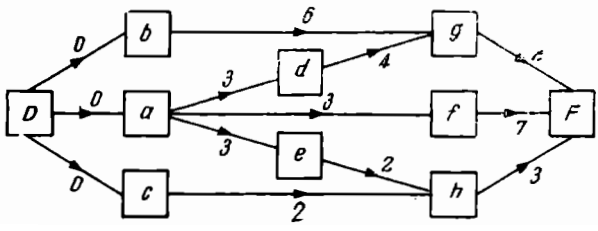


Fig. 2.6.

Vom da acum cîteva exemple de situații care pot fi întîlnite în stabilirea unui program.

2.2.2. OPERAŢII COMPUSE

Să considerăm o operaţie a compusă din trei operaţii elementare a_1, a_2 şi a_3 (fig. 2.7) astfel încît operaţia c urmează lui a_1, d urmează lui a_2 şi b urmează lui a_3.

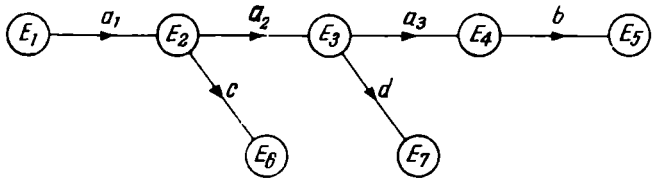


Fig. 2.7

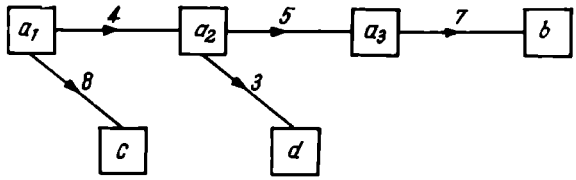


Fig. 2.8

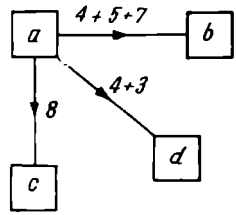


Fig. 2.9

Figura 2.8 dă reprezentarea prin sarcini şi restricţii. Se vede că este posibil atunci să se simplifice reprezentarea (fig. 2.9) ; noile restricţii sînt uşor de calculat.

2.2.3. OPERAŢII PARALELE

Să presupunem că între două evenimente E_i şi E_j se plasează două operaţii diferite b şi c care urmează unei operaţii a. Se introduce atunci un eveniment fictiv E'_j şi o operaţie *virtuală* x între E'_j şi E_j. În cazul în care există trei, patru,... operaţii în paralel, vom proceda la fel, introducînd pentru fiecare dintre ele un eveniment fictiv şi o operaţie virtuală.

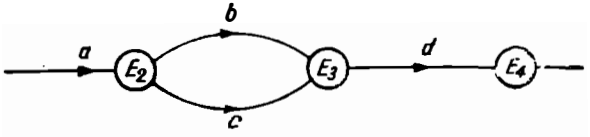


Fig. 2.10

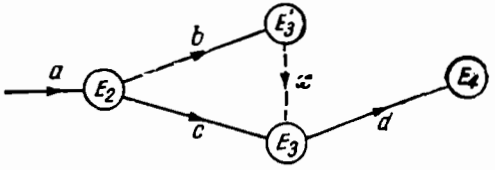


Fig. 2.11

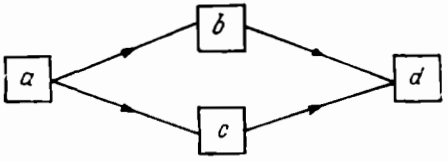


Fig. 2.12

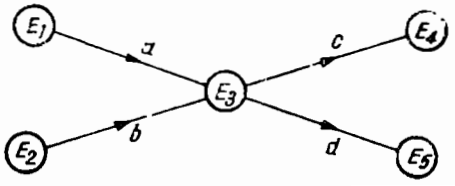


Fig. 2.13

În reprezentarea prin sarcini şi restricţii (fig. 2.12) nu este util să se introducă astfel de evenimente şi operaţii artificiale.

2.2.4. OPERAŢII DEPENDENTE ŞI INDEPENDENTE

Să considerăm fig. 2.13 : operaţia c urmează lui a şi b, la fel operaţia d urmează lui a şi b. Acum, să presupunem că c urmează lui a şi b, dar d îi urmează lui b, fără să-i urmeze lui a; nu se mai poate folosi acelaşi graf, trebuie introdus un eveniment E_3' şi o operaţie x artificiale (fig. 2.14).

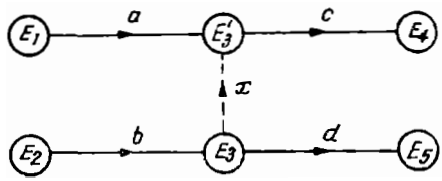


Fig. 2.14

În reprezentarea prin sarcini şi restricţii, nu este necesară introducerea evenimentelor şi a operaţiilor artificiale. Figura 2.15 corespunde cazului figurii 2.13 şi figura 2.16 corespunde cazului figurii 2.14.

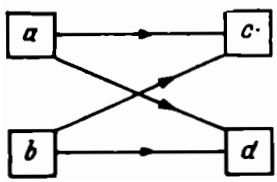


Fig. 2.15

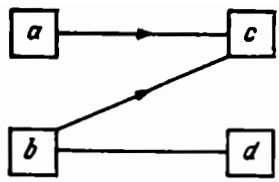


Fig. 2.16

2.2.5. RESTRICŢII PARTICULARE. CONDIŢII LIMITĂ DE PORNIRE

Să presupunem că o anumită operaţie nu poate începe decît pornind de la o anumită dată, adică pornind cu o anumită întîrziere după evenimentul E_1 considerat primul. O astfel de restricţie se va exprima introducînd o operaţie artificială z între E_1 şi evenimentul E_i unde începe operaţia considerată (fig. 2.17). În cealaltă reprezentare se va introduce o restricţie între D şi b (fig. 2.18).

Figurile 2.19 şi 2.20 se referă la cazul în care se ajunge la introducerea a două operaţii artificiale x şi z; operaţia c trebuie să urmeze operaţiei a şi să pornească la data z.

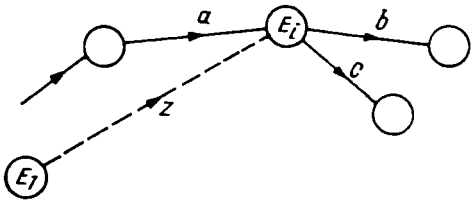


Fig. 2.17

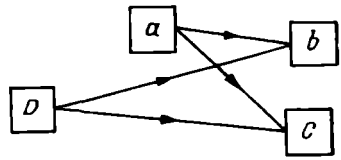


Fig. 2.18

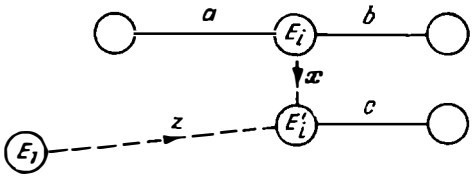


Fig. 2.19

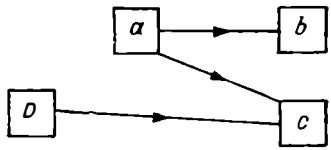


Fig. 2.20

În numeroase probleme se întîlnesc astfel de *condiţii de pornire*, de exemplu: termene de livrare de material, condiţii climaterice etc. După cum se vde, astfel de condiţii particulare pot fi uşor introduse în program.

Să semnalăm, de asemenea, un alt tip de restricţii întîlnite uneori:

Pentru ca o sarcină j să poată începe, este necesar ca timpul scurs de la începerea unei alte sarcini i să fie cel mult egal cu un timp dat t_{ij}.

Astfel de restricţii permit evitarea anumitor aşteptări neacceptabile, asigurarea continuităţii între două sarcini sau traducerea simultaneităţii. Pentru a putea ţine cont de ele şi a le introduce în graf, le vom enunţa altfel: *Pentru ca o sarcină i să poată începe, este necesar ca cel puţin timpul scurs de la începerea unei alte sarcini j să fie egal cu un timp dat* $(-t_{ij})$, ceea ce conduce la restricţii obişnuite, dar cu o durată negativă (lungimea arcului asociat va fi deci negativă), ceea ce nu complică în mod necesar rezolvarea problemei.

Ne vom ocupa de data realizării lucrărilor şi aceasta ne va conduce la obiectul lucrării : metoda drumului critic. Algoritmii şi procedeele care vor fi luate în considerare vor conveni tot atît de bine unei reprezentări evenimente-operaţii, cît şi unei reprezentări sarcini-restricţii.

2.3. DATA REALIZĂRII ANSAMBLULUI DE LUCRĂRI. DRUMUL CRITIC

Avînd stabilit graful unui program, organizatorul îşi va pune întrebarea următoare : care este *data realizării* ansamblului de lucrări, adică durata programului de realizat. Această durată nu poate fi inferioară sumei *timpilor operatori* luaţi pe *drumul cel mai nefavorabil de la* E_1 *la* E_n, adică cel care dă între aceste două puncte o sumă maximă de timpi operatori. Acest drum (putem avea mai multe) este numit *drum critic.*

Aceasta se poate înţelege cu ajutorul grafului foarte elementar din fig. 2.21. Evenimentul E_3 reprezintă realizarea celor trei operaţii $P_{1.2}$, $P_{1.3}$ şi $P_{2.3}$. Se vede că vor trebui 8 unităţi de timp pentru ca acestea să aibă timp să se realizeze.

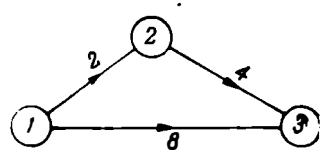


Fig. 2.21

Luînd pentru durata ansamblului de lucrări suma timpilor operatori luaţi pe drumul *cel mai nefavorabil de la* E_1 *la* E_n, ne-am asigurat că toate operaţiile prevăzute pot fi efectiv realizate, ţinînd seama de duratele lor respective. Calculul datei de realizare a lui E_n revine atunci la căutarea în graf a drumului cel mai lung*) sau a *drumului critic.*

Formularea matematică şi diferiţii algoritmi care permit rezolvarea acestei probleme vor fi daţi în 2.5. Toţi aceşti algoritmi se bazează pe *teorema de optimalitate* a programării dinamice. Pentru

*) Este totuşi preferabil să vorbim de *drumul de valoare maximală,* mai curînd decît de drumul *cel mai lung.* Într-adevăr, în teoria grafurilor, lungimea unui drum este numărul de arce care constituie acel drum şi lungimea unui arc este, prin definiţie, egală cu 1.

moment vom prezenta o variantă a unuia dintre aceşti algoritmi, aplicîndu-l la un exemplu cu caracter didactic.

Începînd cu E_1, căruia îi atribuim termenul 0, se consideră în fiecare vîrf arcele care ajung acolo ; pentru fiecare din aceste arce se face suma timpului operator implicat de arc şi a termenului evenimentului origine al arcului. Se compară rezultatele şi se alege valoarea cea mai mare, pentru a o afecta vîrfului considerat.

Să considerăm fig. 2.22. În E_2 ajunge un singur arc (1, 2) ; pentru că în E_1 avem 0, în E_2 punem $0 + 8 = 8$. În E_3 ajung două arce (2, 3) şi (1, 3), se compară atunci $8 + 4 = 12$ şi $0 + 13 = 13$ şi punem 13 în E_3 ; aceasta înseamnă că E_3 nu poate fi atins înainte de timpul 13. În E_4 ajung două arce (3, 4) şi (1, 4), se compară atunci $13 + 7 = 20$ şi $0 + 9 = 9$, punem deci 20 în E_4. În E_5 punem 17. În E_6 ajung două arce (2. 6) şi (3, 6), se compară $8 + 6 = 14$ şi $13 + 10 = 23$ şi punem 23 în E_6. În E_8 ajung trei arce (6, 8), (3, 8) şi (4, 8), se compară $23 + 3 = 26$, $13 + 6 = 19$ şi $20 + 9 = 29$, deci punem 29 în E_8. Şi astfel continuăm pînă în E_{12} unde se găseşte în final 61. Acest număr reprezintă timpul de realizare pornind de la data 0. Drumul corespunzător lui 61 se obţine uşor din aproape în aproape, mergînd de la E_{12} la E_1 ; el constituie drumul critic. Acesta este însemnat cu linii îngroşate în fig. 2.22.

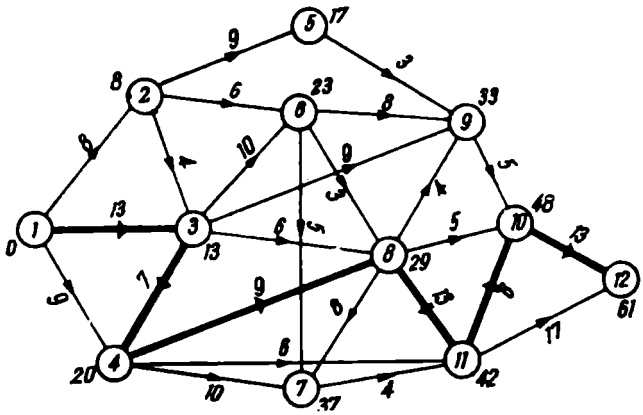


Fig. 2.22

Dacă programul se desfășoară fără incidente, durata sa va fi 61 săptămîni și evenimentele diferite se vor produce la datele însemnate pe fig. 2.22.

Operațiile

$$P_{1.3},\ P_{3.4},\ P_{4.8},\ P_{8.11},\ P_{11.10} \text{ și } P_{10.12}$$

se numesc *operații critice*. Ele trebuie să înceapă la datele evenimentelor origine ale arcelor. Astfel operația $P_{4.8}$ trebuie să fie întreprinsă la dat a evenimentului E_2, adică la data 20. Dacă pornirea unei operații critice este întîrziată, atunci tot programul se va întîrzia. De exemplu, dacă operația $P_{4.8}$ nu este întreprinsă decît la data 22, vila nu va fi terminată decît la data 63.

Operațiile critice sînt, deci, operațiile programului asupra cărora planificatorul trebuie să-și îndrepte toată atenția în cursul realizării, căci de buna lor desfășurare depinde data de realizare a ansamblului lucrărilor.

În 2.4 vom vedea că *operațiile necritice* admit unele întîrzieri în începerea lucrărilor.

2.4. INTERVALE DE FLUCTUAȚIE. MARGINI ALE OPERAȚIILOR

2.4.1. DATA REALIZĂRII UNUI EVENIMENT

Am stabilit, în paragraful precedent, datele diferitelor evenimente care compun programul.

Este interesant de cunoscut, pentru fiecare eveniment E_i necritic data sa limită de realizare, dată de la depășirea căreia tot programul va fi întîrziat. Pentru aceasta să considerăm evenimentul E_i. Timpul minim necesar pentru realizarea operațiilor situate între E_1 și E_n se obține căutînd pe graf drumul cel mai lung de la E_i la E_n. Printr-un astfel de procedeu, sîntem asigurați că operațiile care urmează lui E_i pot fi efectiv realizate, ținînd seama de duratele lor respective.

Data limită căutată t_i^* se va obține scăzînd acest timp din data t_n a evenimentului final E_n.

Am obținut astfel, pentru fiecare eveniment necritic, două date:

— data t_i este *data așteptată a realizării* evenimentului E_i;

— data t_i^* *) este *data limită de realizare* a evenimentului E_i,

după depășirea căreia timpul total de execuție a ansamblului lucrărilor este modificat.

Pentru evenimentele critice, data limită t_i^* se confundă cu data așteptată t_i. Aceste evenimente nu tolerează nici o întîrziere în privința realizării lor sau, ceea ce revine la același lucru, operațiile critice nu tolerează nici o întîrziere în ceea ce privește începerea lucrărilor.

Intervalul $[t_i^*, t_i]$ se numește *interval de fluctuație*, este deci intervalul în care se va putea plasa evenimentul necritic E_i, fără a modifica timpul total de execuție a ansamblului lucrărilor.

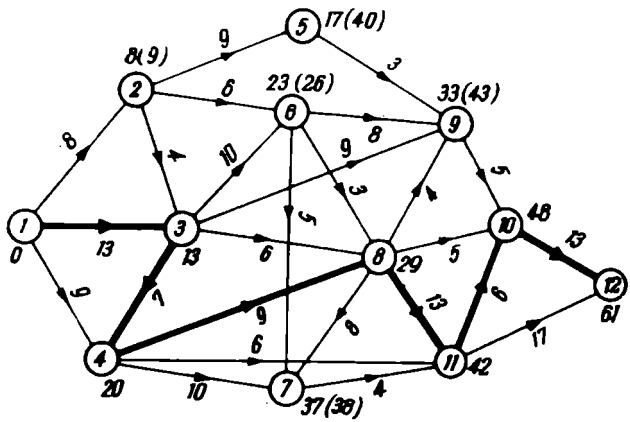


Fig. 2.23

Să reluăm exemplul construirii unei vile și să calculăm datele limită t_i^* folosind aceeași metodă care ne-a servit la calcularea lui t_i, dar de data aceasta pornind de la evenimentul final E_{12}. Să considerăm mai întîi (fig. 2.23) evenimentul E_7 care este separat de E_{11} de

*) Data așteptată t_i este uneori numită *data cea mai apropiată* și data limită t_i^* — *data cea mai tîrzie.*

un timp operator 4, deci operația $P_{7,11}$ poate începe cu 4 săptămîni înaintea lui E_{11} și evenimentul E_7 trebuie să fie plasat în intervalul [37, 38]. E_9 este separat de E_{10} de un timp operator 5, deci operația $P_{9,10}$ poate începe cu 5 săptămîni înaintea lui E_{10} și evenimentul E_9 trebuie să fie plasat în intervalul [33, 43]. E_6 este separat de E_9 de un timp operator 8, de E_8 de un timp operator 3 și de E_7 de un timp operator 5 ; trebuie să comparăm $43 - 8 = 35$, $29 - 3 = 26$ și $38 - 5 = 33$ și astfel evenimentul E_6 nu poate depăși data 26 (cea mai mică din cele trei) fără a provoca o perturbare care să influențeze data terminării lucrării. Numerele care trebuie să fie calculate au fost așezate pe fig. 2.23 și încadrate în paranteze pentru a nu fi confundate cu cele așezate în timpul căutării drumului critic. În E_5 se va așeza (40) ; în E_2 se va compara $40 - 9 = 31$, $26 - 6 = 20$, $13 - 4 = 9$ și se va așeza (9).

În final, datele evenimentelor E_i se vor putea plasa în intervalele date mai jos, aceste intervale putînd să se reducă la o dată obligatorie pe drumul critic :

E_1 : 0	E_7 : [37, 38]
E_2 : [8,9]	E_8 : 29
E_3 : 13	E_9 : [33, 43]
E_4 : 20	E_{10} : 48
E_5 : [17, 40]	E_{11} : 42
E_6 : [23, 26]	E_{12} : 61

Este la fel de interesant să cunoaștem, pentru fiecare operație P_{ij}, întîrzierea care poate fi admisă la începerea sa, fără a perturba data de realizare a evenimentului E_j. Această întîrziere putînd fi admisă la începerea lui P_{ij} este *marginea liberă* a lui P_{ij}.

Dacă t_i și t_j sînt datele așteptate ale evenimentelor E_i și E_j, incadrînd operația P_{ij}, de durată t_{ij}, marginea sa liberă este

$$t_j - t_i - t_{ij}\,, \tag{2.1}$$

Marginile libere ale operațiilor critice sînt nule, căci pornirea lor trebuie să înceapă fără nici o întîrziere.

Se definește de asemenea pentru fiecare operație P_{ij} *o margine totală* și o *margine sigură*.

Marginea totală a operației P_{ij} este, prin definiție :

$$t_j^* - t_i - t_{ij}. \tag{2.2}$$

Marginea sigură a operației P_{ij} este, prin definiție :

$$t_j - t_i^* - t_{ij}. \tag{2.3}$$

Intervalele de fluctuație și marginile libere măsoară elasticitatea unui program. Cu cît acestea sînt mai reduse, cu atît programul este mai rigid. Un program *total rigid* este un program în care toate drumurile sînt critice : nu există atunci nici intervale de fluctuație, nici margini libere. Nici o întîrziere nu poate fi tolerată de nici una dintre operații.

Diferența esențială între intervalul de fluctuație pentru un eveniment E_i și marginea liberă sau totală pentru o operație P_{ij} este că *intervalul de fluctuație* pentru E_i reprezintă întîrzierea care poate fi tolerată, în ceea ce privește realizarea lui E_i, fără a perturba datele fixate ale evenimentelor critice și, în particular, a evenimentului final, corespunzător realizării proiectului, în timp ce *marginea liberă* pentru operația P_i, reprezintă întîrzierea care poate fi adăugată începerii acestei operații fără a perturba data de realizare așteptată a evenimentului E_j, iar *marginea totală* reprezintă întîrzierea maximă de începere a acestei operații.

Un alt aspect al noțiunii de margine liberă poate fi examinat în cazul în care timpii operatori ai operațiilor, necritice sînt susceptibili de a fi lungiți. Marginea liberă corespunde atunci lungirii posibile a duratei operației necritice P_{ij} lăsînd neschimbate datele t_i și t_j ale evenimentelor E_i și E_j, care încadrează această operație. Această diferență între intervalul de fluctuație și marginea liberă sau totală apare mai bine în graful din fig. 2.23 reprodus în fig. 2.24. Astfel intervalul de fluctuație al lui E_6 este [23, 26]. Marginea liberă a operației $P_{6,9}$ este

$$33 - 23 - 8 = 2.$$

Operația $P_{6,9}$ poate deci să înceapă la data $23 + 2 = 25$ fără a perturba data lui E_9 care rămîne atunci 33. Marginile libere ale operațiilor sînt însemnate în paranteze pe graful din fig. 2.24.

Marginea totală a operației $P_{6,9}$ este $43-23-8=12$; operația $P_{6,9}$ poate atunci să înceapă la data $23+12=35$ fără a antrena vreo întîrziere în realizarea ansamblului lucrărilor.

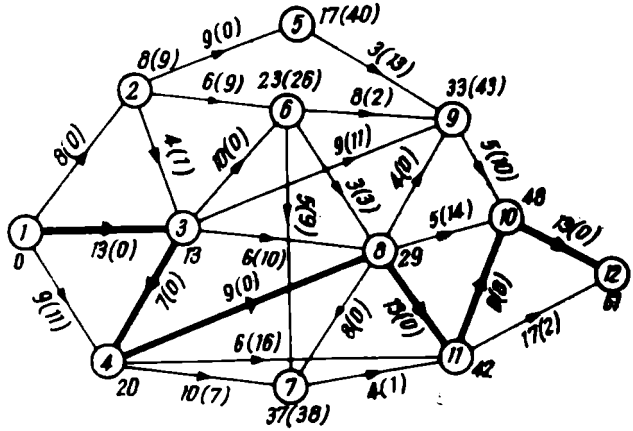


Fig. 2.24

De fapt, marele interes al noțiunilor de intervale ale fluctuației și de margini libere apare mai ales în cursul realizării programului. Dacă toate evenimentele se realizează înaintea datei lor limită t_i^*, programul se va desfășura normal și data realizării finale t_n va fi respectată. Din contră, dacă se întîmplă, dintr-un motiv oarecare, ca data de realizare a unui eveniment să depășească data limită t_i^*, atunci organizatorul trebuie să ia măsuri, dacă are posibilitatea, pentru a face să accelereze sarcinile din această parte a programului. Dacă nu are această posibilitate, el poate afirma atunci că data de realizare a ansamblului lucrărilor t_n va fi întîrziată și va putea evalua întîrzierea.

Datele limită sînt deci *limite de securitate* și joacă rolul de sonerii de alarmă pentru organizator în timpul punerii în execuție a programului.

În anumite studii s-a utilizat ca un criteriu de prioritate marginea liberă, dar în general, cînd este vorba de a pune în lucru și de a se controla mijloacele destinate realizării ordonanțării, criteriul de prioritate ales este marginea totală; este criteriul luat în considerație cel mai des.

2.4.2. OBSERVAŢII ASUPRA METODEI POTENŢIALELOR

Aplicarea procedeelor de calcul care vor fi prezentate la un graf al reprezentării prin sarcini şi restricţii necesită comentariile următoare.

Data t_i calculată acum este, data de pornire a sarcinii (operaţiei) P_i. Această dată este numită în metoda potenţialelor *data cea mai apropiată.*

La fel, data t_i^* este data limită de pornire a sarcinii P_i, după depăşirea căreia timpul total de execuţie al ansamblului lucrărilor este lungit; ea se numeşte *data cea mai tîrzie.*

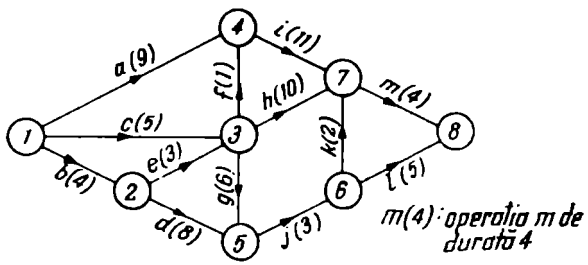


Fig. 2.25

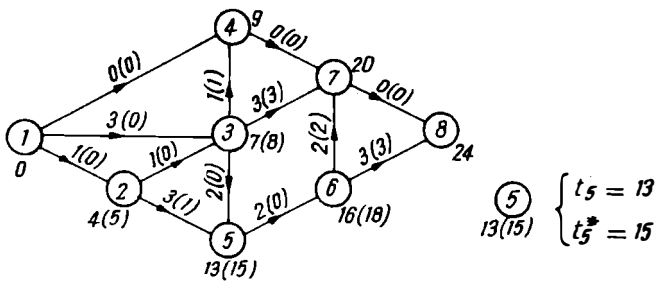


Fig. 2.26

Definiţiile date mai înainte privitoare la diferitele margini sînt mereu valabile şi se va observa că marginea totală a sarcinii P_i este furnizată direct de diferenţa $t_i^* - t_i$.

Exemplul următor va permite cititorului să sesizeze mai bine legăturile existente între cele două reprezentări. Figura 2.25 reprezintă graful unui program. Pe fig. 2.26 s-au însemnat pe arcele gra-

fului marginea totală şi între paranteze marginea liberă a operaţiilor. În sfîrşit, figura 2.27 este reprezentarea prin sarcini şi restricţii ale aceluiaşi program.

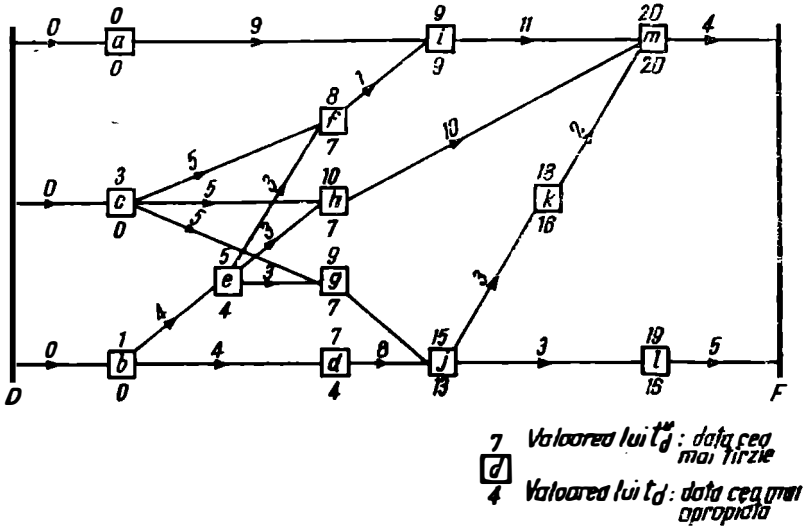


Fig. 2.27

Se constată că pentru operaţia d, de exemplu, data sa limită de pornire se obţine pe fig. 2.26, făcînd suma datei aşteptate a evenimentului E_2 şi a marginii totale, fie $4 + 3 = 7$; această dată este tocmai data cea mai tîrzie notată pe fig. 2.27.

2.5. CĂUTAREA DRUMULUI CRITIC. ALGORITMII UTILIZAŢI

2.5.1. ASPECT MATEMATIC

Acest paragraf poate fi neglijat la o primă lectură, el prezentînd în mod simplu aspectul matematic al ideilor dezvoltate în paragrafele precedente *).

*) Cititorul care nu este obişnuit cu mînuirea formulelor matematice va merge direct la algoritmul practic dat la sfîrşitul acestui paragraf.

Formularea matematică a metodei expuse în 2.3 este următoarea:

Fie **U** mulțimea arcelor constituind graful programului, t_{ij} durata operației P_{ij}, t_i și t_i^* datele de realizare *așteptată* și *limită* ale evenimentului E_i. Atunci avem:

$$t_1 = 0 \tag{2.4}$$

$$t_j = \underset{(i,\,j)\,\in\,\mathbf{U}_j^-}{\mathbf{MAX}} - (t_i + t_{ij}),\quad j = 2,\ 3,\ldots,\ n, \tag{2.5}$$

unde (i, j) reprezintă arcul mergînd din vîrful i la vîrful j și $\mathbf{U}_j^-$ este submulțimea arcelor care se întîlnesc în j și sînt orientate către j.

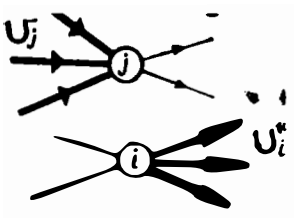


Fig. 2.28

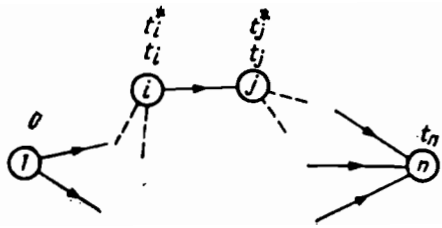


Fig. 2.29

MAX înseamnă că se ia maximul pentru toate arcele (i, j) aparținînd lui $\mathbf{U}_j^-$.

De asemenea::

$$t_i^* = \underset{(i,\,j)\,\in\,\mathbf{U}_j^+}{\mathbf{MIN}}\ (t_j^* - t_{ij}),\quad i = 2,\ldots,\ n-1, \tag{2.6}$$

$t_n^* = t_n$ — data de realizare a proiectului total, (2.7)

$t_1^* = t_1 = 0$ — data de pornire a proiectului. (2.8)

Intervalele de fluctuație și marginile se deduc atunci din (2.5) și (2.6) prin relațiile următoare:

interval de fluctuație: $t_i^* - t_i$, (2.9)

marginea totală a lui P_{ij}: $t_i^* - t_i - t_{ij}$, (2.10)

marginea liberă a lui P_{ij}: $t_j - t_i - t_{ij}$, (2.11)

marginea sigură a lui P_{ij}: $t_j - t_i^* - t_{ij}$. (2.12)

O altă metodă de calcul este următoarea:

$$t_1 = 0, \tag{2.13}$$

$$t_j = \underset{\mu \in \mu_j}{\text{MAX}} \left[\sum_{(i\,j) \in \mu} t_{ij}\right], \quad j = 2, \ldots, n, \tag{2.14}$$

μ_j fiind mulțimea drumurilor plecînd de la 1 către j,

$$t_n^* = t_n, \tag{2.15}$$

$$t_j^* = t_n - \underset{\nu \in \nu_j}{\text{MAX}} \left[\sum_{(i,\,j) \in \nu} t_{ij}\right], \quad j = 2, \ldots, n-1 \tag{2.16}$$

ν_j fiind mulțimea drumurilor mergînd de la j către n,

$$t_1^* = t_1 = 0, \tag{2.17}$$

formulele (2.9) — (2.12) determină deci intervalele de fluctuație și marginile.

Algoritmii lui Ford și Bellman-Kalaba vor fi de asemnea folosiți în această căutare a drumului critic și a datei t_n de realizare a programului.

Iată, cu titlu de informație, acești doi algoritmi.

2.5.2. ALGORITMUL LUI FORD [1, 3]

1° Se notează fiecare vîrf E_i cu t_i; se începe prin a lua $t_1 = 0$ și $t_i = 0$ pentru $i \neq 1$.

2° Se caută un arc (i, j) astfel încît $t_j - t_i < t_{ij}$; se înlocuiește atunci t_j prin

$$t'_j = t_i + t_{ij} > t_j;$$

se va observa că $t'_j > 0$ dacă $j \neq 1$. Se continuă astfel pînă cînd nici un arc nu mai permite să-l mărim pe t_i pentru orice $i \neq 1$.

3° Există un vîrf E_{p_1} astfel încît

$$t_m - t_{p_1} = t_{p_1\,n},$$

căci t_n a crescut monoton în cursul procedeului și E_{p_1} este ultimul vîrf folosit pentru a-l mări pe t_n. La fel fie E_{p_2} astfel încît.

$$t_{p_1} - t_{p_2} = t_{p_1\,p_2}.$$

Șirul t_n, t_{p_1}, t_{p_2}, ... fiind strict descrescător, se va ajunge la un anumit moment la situația $E_{p_{k+1}} = E_1$. Atunci t_n va fi valoarea drumului

cel mai lung de la E_1 la E_n (data de realizare a programului) şi acest drum va fi

$$\mu = [E_1\, E_{p_k}, E_{p_{k-1}}, \ldots, E_{p_1}, E_n].$$

2.5.3. ALGORITMUL BELLMAN-KALABA [3]

Este o variantă a celui precedent prezentat cu ajutorul programării dinamice. El se bazează pe proprietatea evidentă următoare: orice drum maximal cuprinzînd cel mult r arce este format din drumuri parţiale conţinînd cel mult k arce ($k \leqslant r$) şi care sînt de asemenea maximale *).

Pentru orice arc $(i, j) \notin \mathbf{U}$ se pune $t_{ij} = -\infty$; pe de altă parte pentru orice i se pune $t_{ii} = 0$.

Se propune găsirea unui drum

$$\mu = [E_1, \quad E_{i_1}, E_{i_2}, \ldots, \quad E_{i_k}, E_n], \tag{2.18}$$

astfel încît

$$t_{1i_1} + t_{i_1 i_2} + t_{i_2 i_3} + \ldots + t_{i_k n} \tag{2.19}$$

să fie maximal.

Este suficient să rezolvăm sistemul de ecuaţii:

$$v_i = \underset{j}{\mathrm{MAX}}\,(t_{ij} + v_j), \quad i = 1, 2, \ldots, \quad n-1, \tag{2.20}$$

$$v_n = 0, \tag{2.21}$$

unde v_i ($i = 1,2,\ldots, \quad n-1$) reprezintă valoarea drumului optimal de la vîrful i la vîrful final. Cele n vîrfuri sînt presupuse numerotate de la 1 la n. originea fiind vîrful 1 şi terminaţia vîrful n.

Se operează după cum urmează, punînd mai întîi:

$$v_i^{(1)} = t_{in}, \quad i = 1, 2, \ldots, \quad n-1, \tag{2.22}$$

$$v_n^{(1)} = 0. \tag{2.23}$$

Se calculează apoi:

$$v_i^{(2)} = \underset{j}{\mathrm{MAX}}\,(t_{ij} + v_j^{(1)}), \quad i = 1, 2, \ldots, n-1, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{2.24}$$

$$v_n^{(2)} = 0\,; \tag{2.25}$$

*) Această proprietate este de asemenea adevărată dacă se consideră drumurile minimale şi drumurile parţiale minimale.

apoi succesiv :

$$v_i^{(k)} = \max_j [t_{ij} + v_j^{(k-1)}], \quad \begin{matrix} i = 1, 2, \ldots, n-1, \\ j = 1, 2, \ldots, n, \end{matrix} \tag{2.26}$$

$$v_n^{(k)} = 0, \tag{2.27}$$

pentru toate valorile lui $k = 1,2,3,4,\ldots$; ne oprim cînd

$$v_i^{(k)} = v_i^{(k-1)}, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.28}$$

Atunci $v_1^{(k)}$ reprezintă valoarea drumului optimal între vîrfurile E_1 şi E_n. Se demonstrează uşor că dacă graful are n vîrfuri, sînt suficiente $n-2$ iteraţii pentru a atinge optimul.

Este important de subliniat că algoritmul Bellman-Kalaba stabilit la început pentru căutarea unui drum cu valoarea minimală se aplică, aici, la căutarea unui drum cu valoare maximală, căci graful unui program nu conţine nici circuite, nici bucle, în caz contrar, lungimea, numărul arcelor conţinute de un drum putînd să nu fie finită, iar valoarea acestui drum nu ar fi mărginită.

2.5.4. EXEMPLU DE APLICARE A ALGORITMULUI BELLMAN-KALABA

Fie graful din fig. 2.30, unde numerele înscrise pe arce sînt timpii operatori.

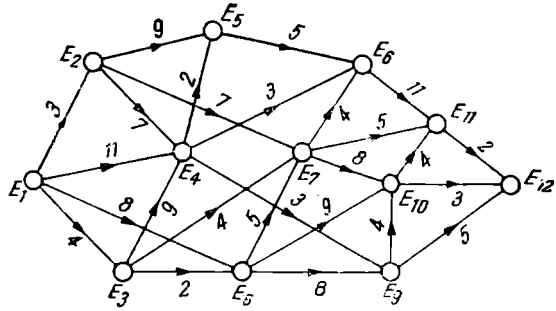


Fig. 2.30

Tabelul 2.1

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	0	3	4	11	$-\infty$	8	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
2	$-\infty$	0	$-\infty$	7	9	$-\infty$	7	$-\infty$	$-\infty$	$\infty-$	$-\infty$	$-\infty$
3	$-\infty$	$-\infty$	0	9	$-\infty$	2	4	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
4	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0	2	$-\infty$	$-\infty$	3	3	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
5	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0	$-\infty$	$-\infty$	5	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
6	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0	5	$-\infty$	8	9	$-\infty$	$-\infty$
7	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0	4	$-\infty$	8	5	$-\infty$
8	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0	$-\infty$	$-\infty$	11	$-\infty$
9	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0	4	$-\infty$	5
10	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0	4	3
11	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0	2
12	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0

Pentru a calcula valorile $v_i^{(s)}$ ale drumurilor optimale de la E_1 la E_{12}, s-a întocmit tabelul 2.1., care reprezintă matricea valorilor

asociate grafului, apoi s-au calculat $v_i^{(1)}$, $v_i^{(2)}$, ..., $v_i^{(k)}$ prin formulele (2.22) — (2.28). Se obține tabelul 2.2.

Tabelul 2.2

$v_i^{(k)}$ \ i / k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	5	3	[2]	0
2	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	8	$-\infty$	13	11	[13]	7	[6]	2	0
3	21	18	17	16	[18]	16	[17]	13	[10]	6	2	0
4	27	[27]	25	[20]	18	[22]	17	13	10	6	2	0
5	31	27	[29]	20	18	22	17	13	10	6	2	0
6	[33]	27	29	20	18	22	17	13	10	6	2	0
7	33	27	29	20	18	22	17	13	10	6	2	0

Să dăm detaliat o parte din calcul; să vedem, de exemplu, cum s-a obținut $v_6^{(3)} = 16$.

$$v_6^{(3)} = \mathbf{MAX}_j\,[t_{6j} + v_j^{(2)}] =$$

$$= \max\,[t_{61} + v_1^{(2)},\ t_{62} + v_2^{(2)},\ t_{63} + v_3^{(2)},\ t_{64} + v_4^{(2)},\ t_{65} + v_5^{(2)},\ t_{66} + v_6^{(2)},$$
$$t_{67} + v_7^{(2)},\ t_{68} + v_8^{(2)},\ t_{69} + v_9^{(2)},\ t_{6.10} + v_{10}^{(2)},\ t_{6.11} + v_{11}^{(2)},\ t_{6.12} + v_{12}^{(2)}] =$$
$$= \max\,[(-\infty) + (-\infty), (-\infty) + (-\infty), (-\infty) + (-\infty),$$
$$(-\infty) + 8,\ (-\infty) + (-\infty),\ 0 + 13,\ 5 + 11,\ (-\infty) + 13,\ 8 + 7,$$
$$9 + 6,\ (-\infty) + 2,\ (-\infty) + 0] = 16.$$

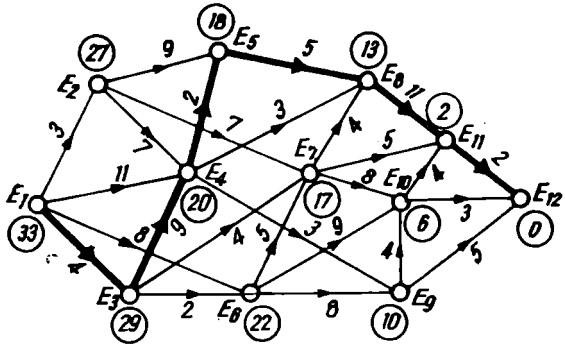


Fig. 2.31

Algoritmul Bellman-Kalaba revine la a căuta drumurile de lungiumea 1, apoi de lungime inferioară sau egală cu 2, apoi de lungime inferioară sau egală cu 3 etc. mergînd de la E_i la E_n și toate de valori maximale, succesiv.

Rezultatele tabelului 2.2 sînt consemnate pe fig. 2.31. Numerele încadrate indică valorile drumurilor cu valori maximale din toate vîrfurile E_i la vîrful final E_n.

2.5.5. ALGORITM PRACTIC ÎN CAZUL GRAFURILOR FĂRĂ CIRCUITE

Am dat la începutul acestui paragraf o metodă generală, valabilă pentru cazul grafurilor fără circuite. Această metodă poate fi prezentată într-un alt mod cu ajutorul algoritmului următor, unde se propun alte notații mai simple.

1° Determinarea nivelelor grafului după metoda din 1.4.

2° Fie x_1 o variabilă reprezentînd un element de nivel (1), x_2 o variabilă reprezentînd un element de nivel (2),.... x_n o variabilă reprezentînd un element de nivel (n),.... Fie x_0 elementul de nivel (0) și x_N elementul de nivel (N), dacă graful posedă $N+1$ nivele determinate pornind de la originea x_0. Se va calcula succesiv:

$$
\begin{aligned}
v_1^{\bullet}(x_1) &= \max\, v_{01}(x_0, x_1) = v_{01}(x_0, x_1),\\
v_2^{\bullet}(x_2) &= \max\left\{\underset{x_1}{\mathrm{MAX}}\,[v_1^{\bullet}(x_1) + v_{12}(x_1, x_2)],\, [v_{02}(x_0, x_2)]\right\},\\
v_3^{\bullet}(x_3) &= \max\left\{\underset{x_2}{\mathrm{MAX}}\,[v_2^{\bullet}(x_2) + v_{23}(x_2, x_3)],\right.\\
&\qquad \left.\underset{x_1}{\mathrm{MAX}}\,[v_1^{\bullet}(x_1) + v_{13}(x_1, x_3)],\, v_{03}(x_0, x_3)\right\}\\
v_4^{\bullet}(x_4) &= \max\left\{\underset{x_3}{\mathrm{MAX}}\,[v_3^{\bullet}(x_3) + v_{34}(x_3, x_4)],\right.\\
&\qquad \underset{x_2}{\mathrm{MAX}}\,[v_2^{\bullet}(x_2) + v_{24}(x_2, x_4)],\\
&\qquad \left.\underset{x_1}{\mathrm{MAX}}\,[v_1^{\bullet}(x_1) + v_{14}(x_1, x_4)],\, v_{04}(x_0, x_4)\right\}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
\tag{2.29}
$$

unde $v_{ij}\ (x_i,\ x_j)$ reprezintă valoarea ataşată arcului $(x_i,\ x_j)$. Se ia

$$v_{ij}\ (x_i,\ x_j) = 0 \quad \text{dacă } (x_i,\ x_j) \notin \mathbf{U}^*), \tag{2.30}$$

adică dacă nu există nici un arc între x_i şi x_j, de la x_i către x_j.

Înlocuind **) MAX prin MIN, max prin min şi punînd

$$v_{ij}\ (x_i,\ x_j) = \infty \quad \text{dacă } (x_i,\ x_j) \notin \mathbf{U}\ , \tag{2.31}$$

se va utiliza acelaşi algoritm pentru căutarea minimului într-un graf fără circuite.

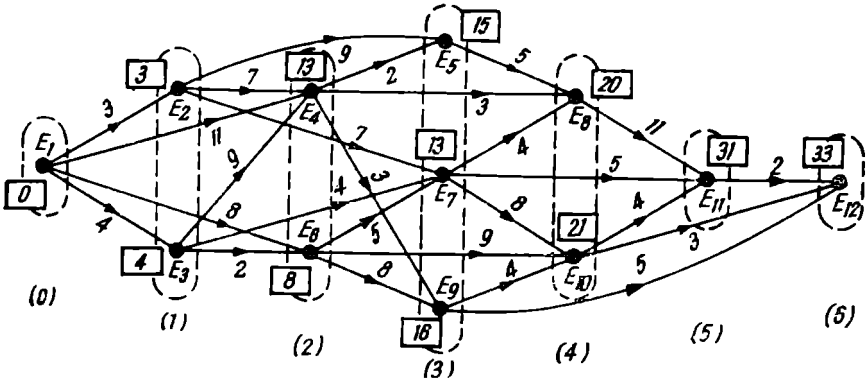


Fig. 2.32

Exemplul din fig. 2.30 a fost reluat în fig. 2.32, unde apar nivelele. Valorile $v_i^*\ (x_i)$ sînt prezentate în interiorul micilor dreptunghiuri. Se poate vedea cu ce uşurinţă se fac astfel de calcule direct pe graf.

---

*) Dacă la programarea la calculatorul electronic se enumără toate cuplurile $(x_i,\ x_j)$ pentru a utiliza formulele (2.29), este convenabil atunci să luăm $v_{ij}\ (x_i,\ x_j) = -\infty$ (un număr negativ suficient de mare) dacă $(x_i,\ x_j) \notin \mathbf{U}$. Dar utilizînd descompunerea în nivele (ceea ce un matematician numeşte *funcţia ordinală a grafului*) o astfel de enumerare poate fi evitată.

**) Obişnuim să scriem MAX cînd trebuie să găsim un maxim în raport cu o variabilă şi max cînd trebuie să luăm maximul într-o mulţime de valori numerice date. La fel pentru MIN şi m.in.

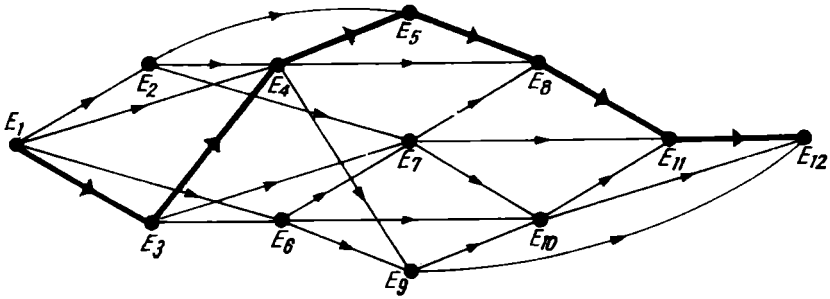


Fig. 2.33

2.6. DOUĂ EXEMPLE DE APLICAȚIE

2.6.1. PRIMUL EXEMPLU PREZENTAT PORNIND DE LA UN STUDIU AL LUI PACAUD *)

În paragrafele precedente, am arătat cum se stabilește graful unui program de lucrări pornind de la relațiile de ordine existente între operațiile diferite, apoi, metoda drumului critic a permis deducerea datei de realizare a ansamblului lucrărilor, intervalele de fluctuație și marginile operatorii.

Astfel apare faptul că metoda drumului critic nu este, prin ea însăși, o metodă de ordonanțare **). Ea nu se aplică decît grafului programului deja stabilit, adică atunci cînd s-a efectuat ordonanțarea lucrărilor. Rolul său este, de fapt, să interpreteze graful dintr-un punct de vedere temporal și să dea toate indicațiile utile privitoare la datele de realizare a diferitelor evenimente ale programului.

Este evident că partea: stabilirea grafului programului, adică partea din studiu care face apel efectiv la căutarea ordonanțării, este cea mai importantă, cea mai lungă și cea mai delicată. Într-adevăr, relațiile de ordine dintre operații nu sînt întotdeauna imperative, nici bine determinate, anumite operații putînd fi întreprinse

*) Seminarul de Cercetare operațională (SOFRO), *Un exemplu de aplicație a teoriei grafurilor la ordonanțarea unui șantier* de Pacaud, Director General la A-PRO-BA.

**) În sensul pe care îl dau adesea acestui cuvînt organizatorii și analiștii cercetării operaționale. În paragraful de față cuvîntul ordonanțare va fi luat în acest sens.

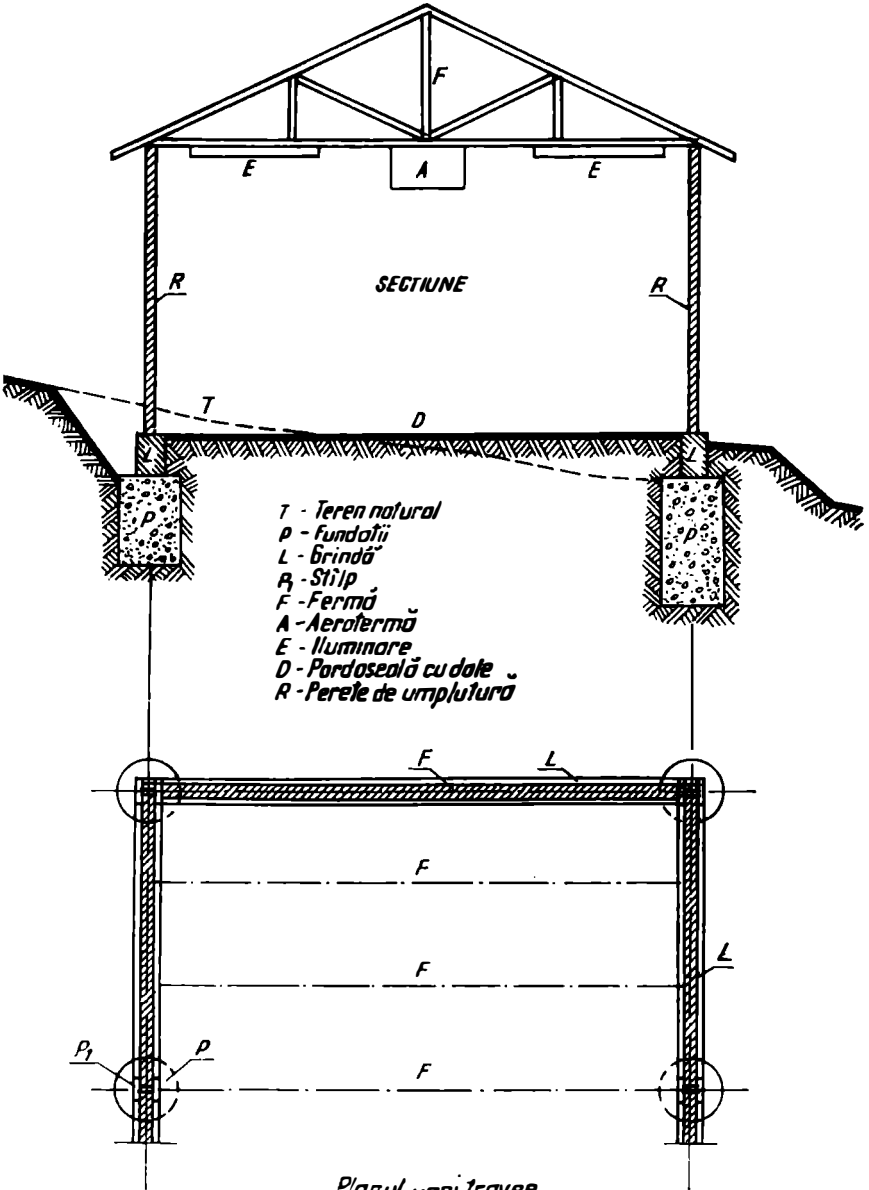

F
E
A
E
R
SECTIUNE
R
T
D
T - Teren natural
p - Fundatii
L - Grindă
P1 - Stîlp
F - Fermă
A - Aerotermă
E - Iluminare
D - Pardoseală cu dale
R - Perete de umplutură
F
L
F
F
L
P1
p
F
Planul unei travee

Fig. 2.34

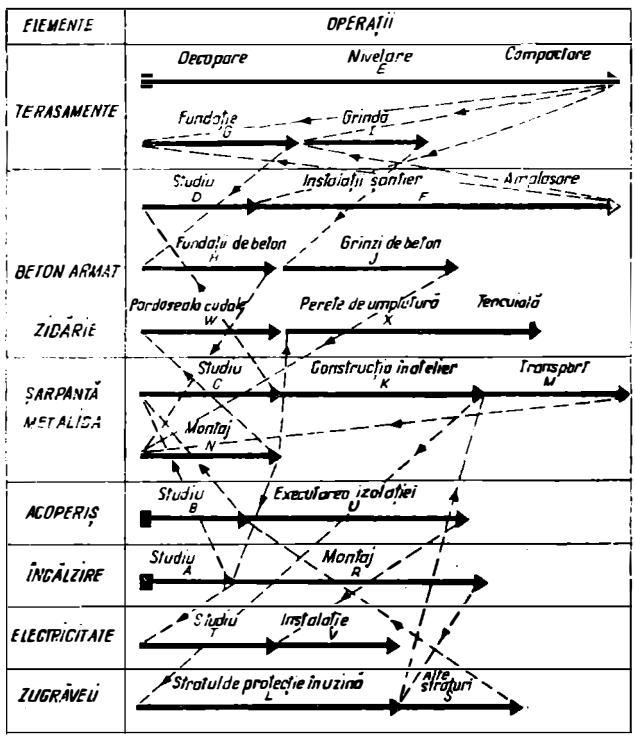
înaintea îndeplinirii complete a unei operaţii precedente (operaţii compuse). Există astfel, în practică, mai multe moduri de a stabili programul unui ansamblu de lucrări şi graful său.

Vom prezenta un exemplu care va ilustra aceste preocupări de ordonanţare şi vom arăta cum metoda drumului critic permite testarea diferitelor grafuri ale aceluiaşi ansamblu de lucrări.

Acest exemplu se referă la construcţia unei clădiri industriale cu 5 travei. *)

Iată tabelul diferitelor operaţii. Săgeţile punctate reprezintă relaţiile de ordine între operaţii. Proiectul începe prin operaţiile A, B şi E.

Tabelul 2.3



*) Traveea este spaţial cuprins între două grinzi sau între două elemente principale de rezemare, consecutive. (N.T.)

Timpii operatori sînt indicați în tabelul 2.4 (în zile). Putem trasa, atunci, graful programului (fig. 2.35).

Tabelul 2.4

$A - 10$	$H - 20$	$R - 35$
$B - 3$	$I - 4$	$S - 40$
$C - 15$	$J - 18$	$T - 2$
$D - 10$	$K - 60$	$U - 20$
$E - 15$	$L - 20$	$V - 20$
$F - 5$	$M - 5$	$W - 35$
$G - 30$	$N - 25$	$X - 55$

Au trebuit introduse două operații virtuale care sînt punctate pe figură, Numerele notate în vîrfurile grafului sînt datele așteptate ale evenimentelor corespunzătoare. Vîrful terminal poartă data 250. Ansamblul lucrărilor va fi deci terminat în 250 de zile. Drumul critic este figurat prin trăsături groase.

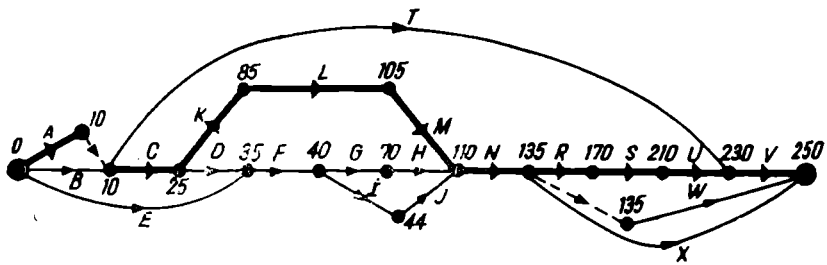


Fig. 2.35

Dar anumite operații pot fi descompuse ; altfel spus, pot fi întreprinse acele operații care urmează înainte de terminarea completă a precedentelor. Aceasta se va produce, dacă clădirea se construiește travee cu travee. Diferite programe pot fi atunci examinate. fiecare dintre ele corespunzînd unei organizări diferite a șantierului.

1° *Programul obținut construind cu prioritate prima travee*

Operațiile descompuse sînt *A*, *C*, *K*, *L*, *M*, *N*, *P*, *S*, *U*, *V*. Desemnarea operațiilor și timpilor operatori sînt indicate în tabelul 2.5.

Tabelul 2.5

	Operațiile	Timpii operatori	
A_1	Studiu pierderi, alegere aeroterme, traseu, deviz greutate suspendată	3	10 A
A_2	Studiu execuție a instalațiilor de încălzire	7	
B	Studiu acoperiș	3	
C_1	Notăm calcule, deviz greutate șarpantă	5	15 C
C_2	Studiu execuție șarpantă	10	
D	Studiu beton armat	10	
E	Terasamente generale	15	
F	Amplasare, instalații șantier	5	
G	Terasamente fundații	30	
H	Beton fundații	20	
I	Terasamente grinzi	4	
J	Beton grinzi	18	
K_1	Fabricarea șarpantei primei travee lemn	12	60 K
K_2	Fabricarea celorlalte patru travee	48	
L_1	Strat protecție al primei travee	4	20 L
L_2	Strat protecție al celorlalte pentru travee	16	
M_1	Transport prima travee	1	5 M
M_2	Transport celelalte patru travee	4	
N_1	Montaj ridicare prima travee	5	25 N
N_2	Montaj ridicarea celorlalte patru travee	20	
R_1	Montaj instalații de încălzirre prima travee	7	35 R
R_2	Montaj celelalte patru travee	28	
S_1	Zugrăveli prima travee	8	40 S
S_2	Zugrăveli celelalte patru travee	32	
T	Studiu instalații electrice	2	
U_1	Izolații acoperiș prima travee	4	20 U
U_2	Izolații acoperiș celelalte patru travee	16	
V_1	Instalații electrice prima travee	4	20 V
V_2	Instalații electrice celelalte patru travee	16	
W	Pardoseală cu dale	35	
X	Tencuirea pereților de umplutură	55	

Acum se poate trasa graful acestui nou program și calcula datele așteptate ale diverselor evenimente ale programului (fig. 2.36). Se vede că data evenimentului final este acum 210. S-au cîștigat deci 40 zile descompunînd anumite operații. Ca și mai înainte, operațiile punctate sînt operații virtuale, a căror motivare a fost indicată în 2.2.

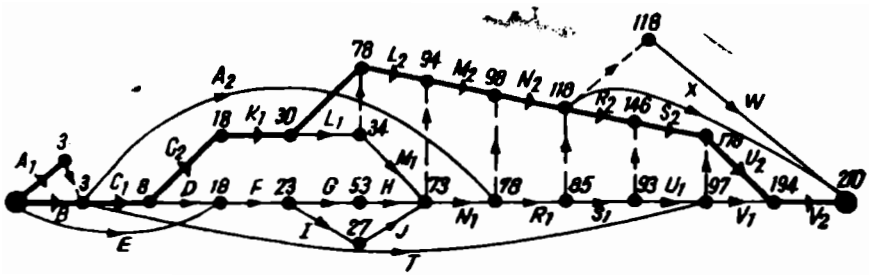


Fig. 2.36

2°. *Programul obținut construind cu prioritate două travee*
Noii timpi operatori sînt:

Tabelul 2.6

$K_1 - 24$	$N_1 - 10$	$U_1 - 8$
$K_2 - 36$	$N_2 - 15$	$U_2 - 12$
$L_1 - 8$	$R_1 - 14$	$V_1 - 8$
$L_2 - 12$	$R_2 - 21$	$V_2 - 12$
$M_1 - 2$	$S_1 - 16$	
$M_2 - 3$	$S_2 - 24$	

Ceilalți timpi operatori rămîn neschimbați. Se obține graful din fig. 2.37. Data evenimentului final este 177. S-a redus deci din nou durata ansamblului lucrărilor.

3° *Programul obținut construind cu prioritate trei travee*
Noii timpi operatori sînt:

Tabelul 2.7

$K_1 - 36$	$N_1 - 15$	$U_1 - 12$
$K_2 - 24$	$N_2 - 10$	$U_2 - 8$
$L_1 - 12$	$R_1 - 21$	$V_1 - 12$
$L_2 - 8$	$R_2 - 14$	$V_2 - 8$
$M_1 - 3$	$S_1 - 24$	
$M_2 - 2$	$S_2 - 16$	

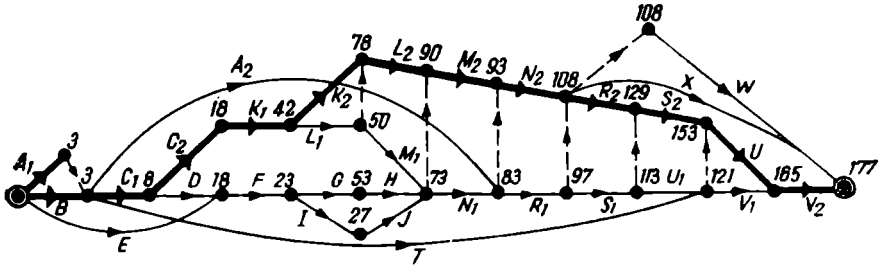


Fig. 2.37

Ceilalţi timpi operatori rămîn neschimbaţi. Se obţine graful din fig. 2.38. Data evenimentului final este 165.

Operaţiile critice sînt redate cu linii groase.

Am prezentat trei programe corespunzînd la trei organizări posibile ale şantierului, însă mai există şi altele.

Interesul acestui exemplu era de a da o privire generală asupra a ceea ce s-a convenit să se numească *probleme de ordonanţare* şi de a arăta cum metoda drumului critic permite să alegem între mai multe programe ale aceluiaşi ansamblu de lucrări. În exemplul nostru, vom alege programul trei care dă un termen total de execuţie de 165 zile.

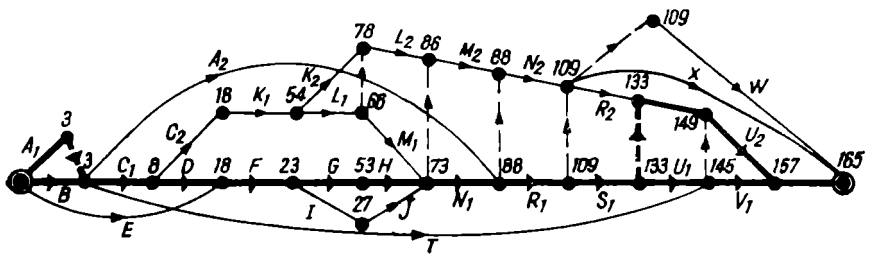


Fig. 2.38

2.6.2. AL DOILEA EXEMPLU

Acest nou exemplu ne-a fost comunicat de B. Roy şi a fost extras dintr-un studiu făcut de Rosinski *), exemplul ilustrîndu-ne importanţa metodei potenţialelor în problemele de ordonanţare, la

*) A se consulta lucrarea *Les Problémes d'ordonnancement*, SOFRO, Dunod, 1964.

fel cu ușurința sa de aplicare. Problema pusă este aceea a realizării ciclului zilnic pentru o nouă unitate de tunele-cofraje concepută în vederea realizării fundațiilor unui microraion de locuințe. Să precizăm, mai întîi, că operațiile de grutaj necesită în total aproape 10 ore pe ciclu și că între ele trebuie intercalate anumite lucrări manuale (9 ore de lucru pentru un muncitor în medie); se concepe că realizarea unui plan executabil în mai puțin de 12 ore ar fi delicată.

Figura 2.39 reprezintă graful asociat acestei probleme. Datele (durate, lungimi de arce) sînt relative la cadențele de lucru minimale (semnul + indică duratele și arcele „comprimabile").

Se vor nota printr-o încadrare dublă sarcinile recurgînd la macara. Se va observa de asemenea prezența restricțiilor de formă particulară între sarcinile 104 și 106 exprimînd că acestea sînt *legate* în execuția lor (106 trebuie să înceapă cu 25 de minute după 104, nici mai înainte, nici mai tîrziu); este una din posibilitățile formulării prin metoda potențialelor. Lăsăm de o parte din cauza spațiului descrierea completă a operațiilor.

Pe aceste baze, se va putea aplica unul din algoritmii (din 2.5) grafului din fig. 2.39 și se vor obține astfel datele de început t_i ale primelor sarcini care figurează pe acest graf.

Se constată imediat contradicții: de exemplu, sarcinile 23 și 51 pe de o parte, 6, 9 și 10 pe de altă parte (și încă altele) fac apel simultan la macara, ceea ce este imposibil.

O regulă de arbitraj de felul „primul venit — primul servit" permite eliminarea acestor contradicții și dă adesea soluții apropiate de optim, procedînd după cum urmează:

— calculul se face cu ajutorul algoritmului ales, dar clasificînd momentele de început t_i în ordine crescătoare,

— dacă există o *disjuncție* între două sarcini i și j ($t_j \geqslant t_i$), ea elimină cu ajutorul unei restricții potențial suplimentare:

$$t_j - t_i \geqslant d_i ,$$

unde d_i este durata sarcinii i, ea impunînd lui j să urmeze după i.

Putem urmări procesul pe graful figurii 2.40 care dă prima soluție: sarcina 51 trebuie să urmeze sarcinii 23 ($t_{51} = t_{22}$, arbitraj asupra numărului sarcinii) și trebuie să preceadă sarcinii 2...

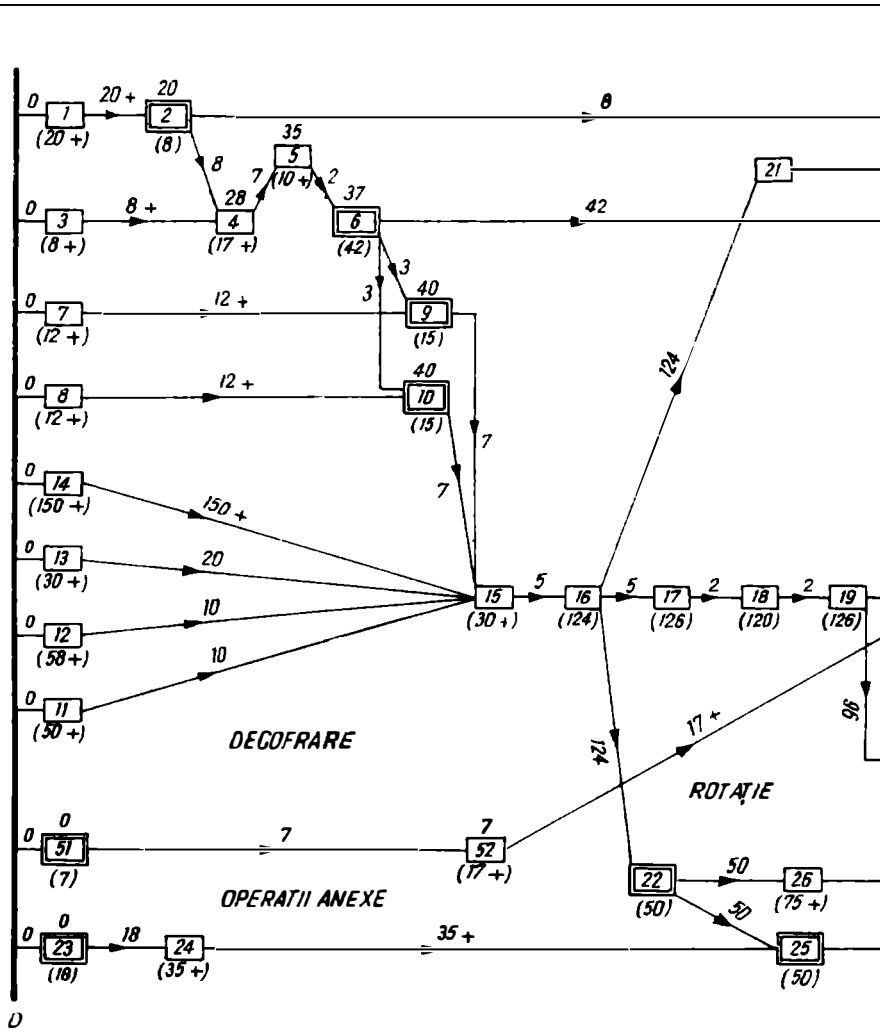


Fig. 2.39 a

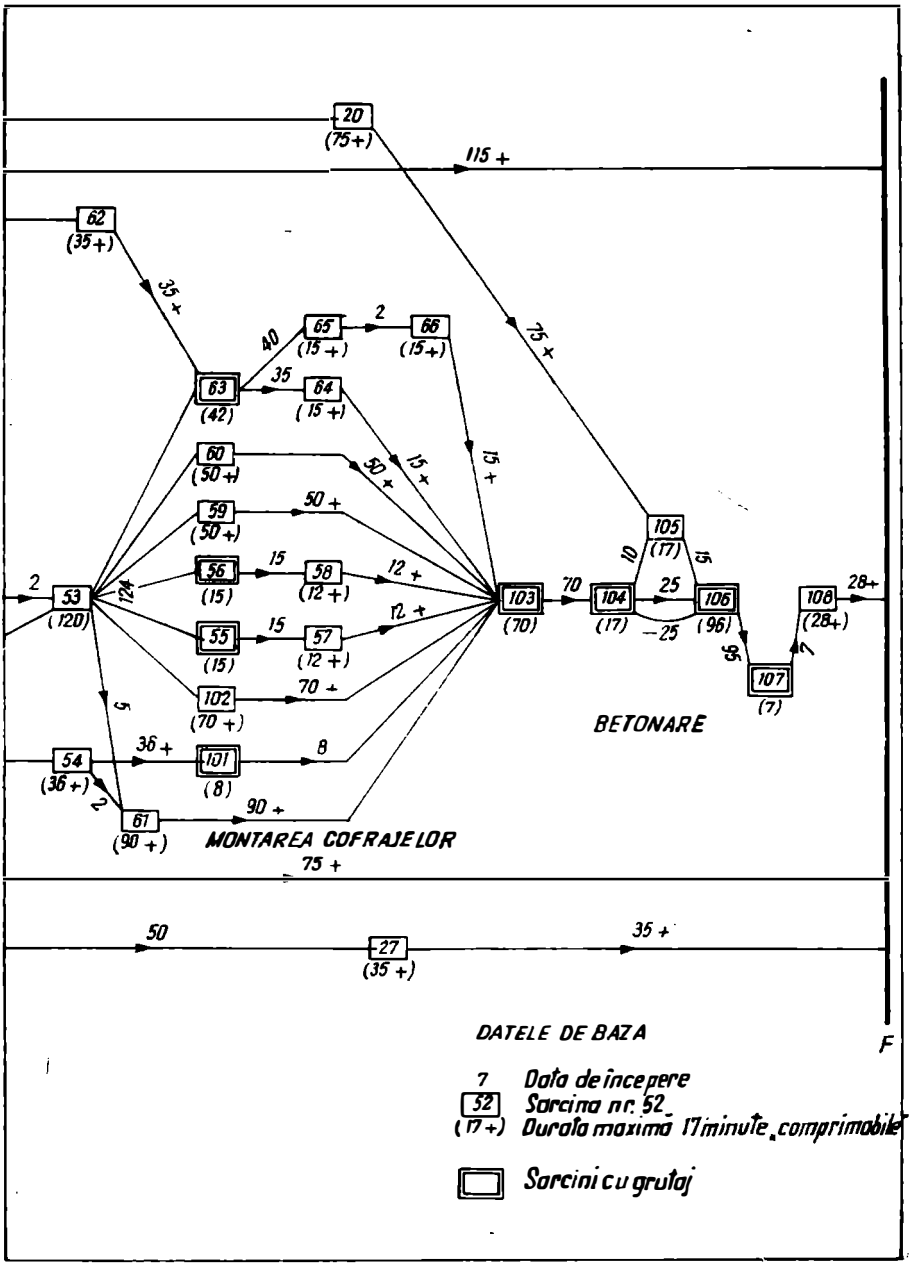

20
(75+)
115 +
62
(35+)
35 +
63
(42)
40
65
(15 +)
2
66
(15+)
75 +
35
64
(15 +)
60
(50+)
50 +
15 +
15 +
59
(50+)
50 +
56
(15)
15
58
(12 +)
12 +
55
(15)
15
57
(12 +)
12 +
102
(70 +)
70 +
2
53
(120)
124
5
54
(36+)
36 +
101
(8)
8
2
61
(90 +)
90 +
MONTAREA COFRAJELOR
75 +
103
(70)
70
104
(17)
25
−25
105
(17)
10
15
106
(96)
95
107
(7)
7
108
(28+)
28+
BETONARE
50
27
(35 +)
35 +
DATELE DE BAZA
7 Data de incepere
52 Sarcina nr. 52
(17+) Durata maxima 17 minute, comprimabile
Sarcini cu grutaj
F

Fig. 2.39 b

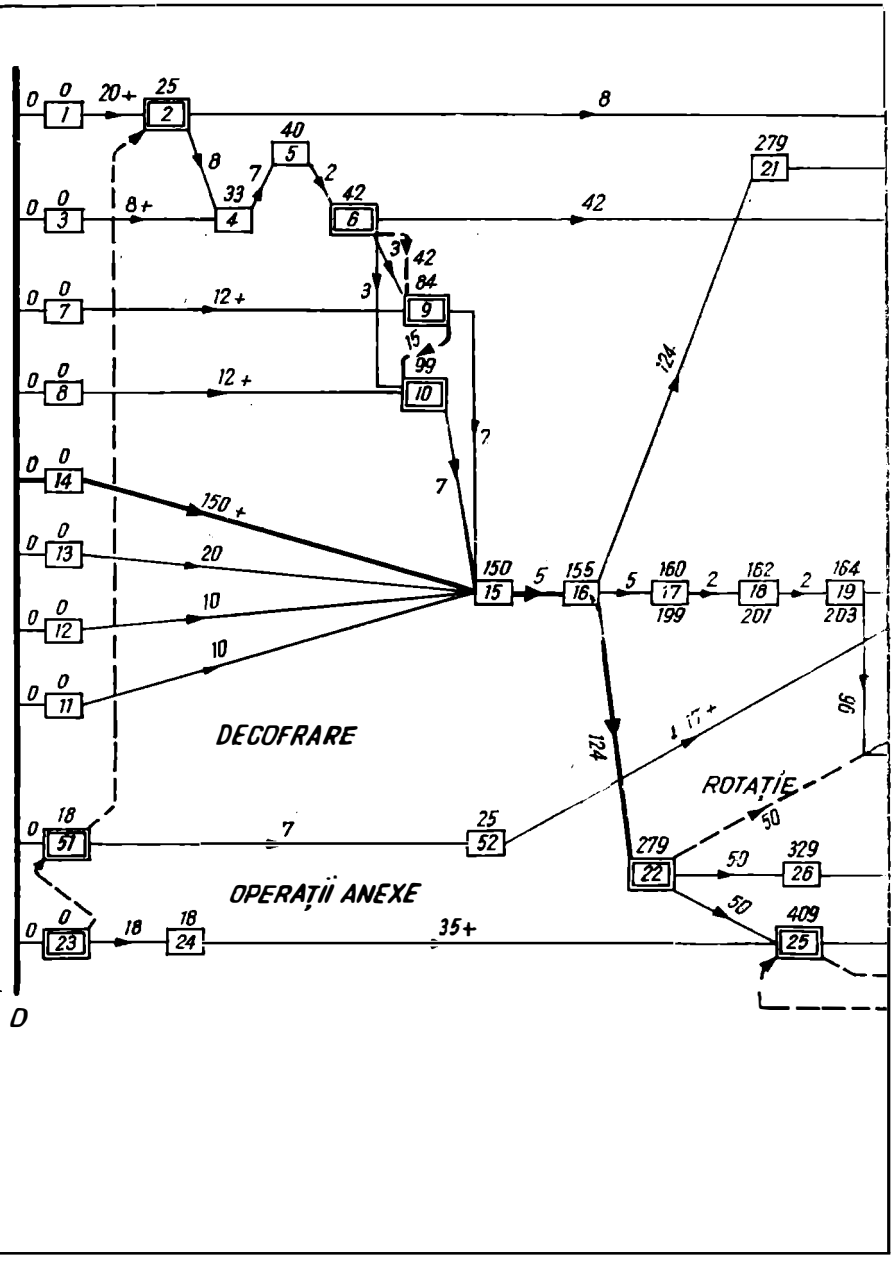


Fig. 2.40 a

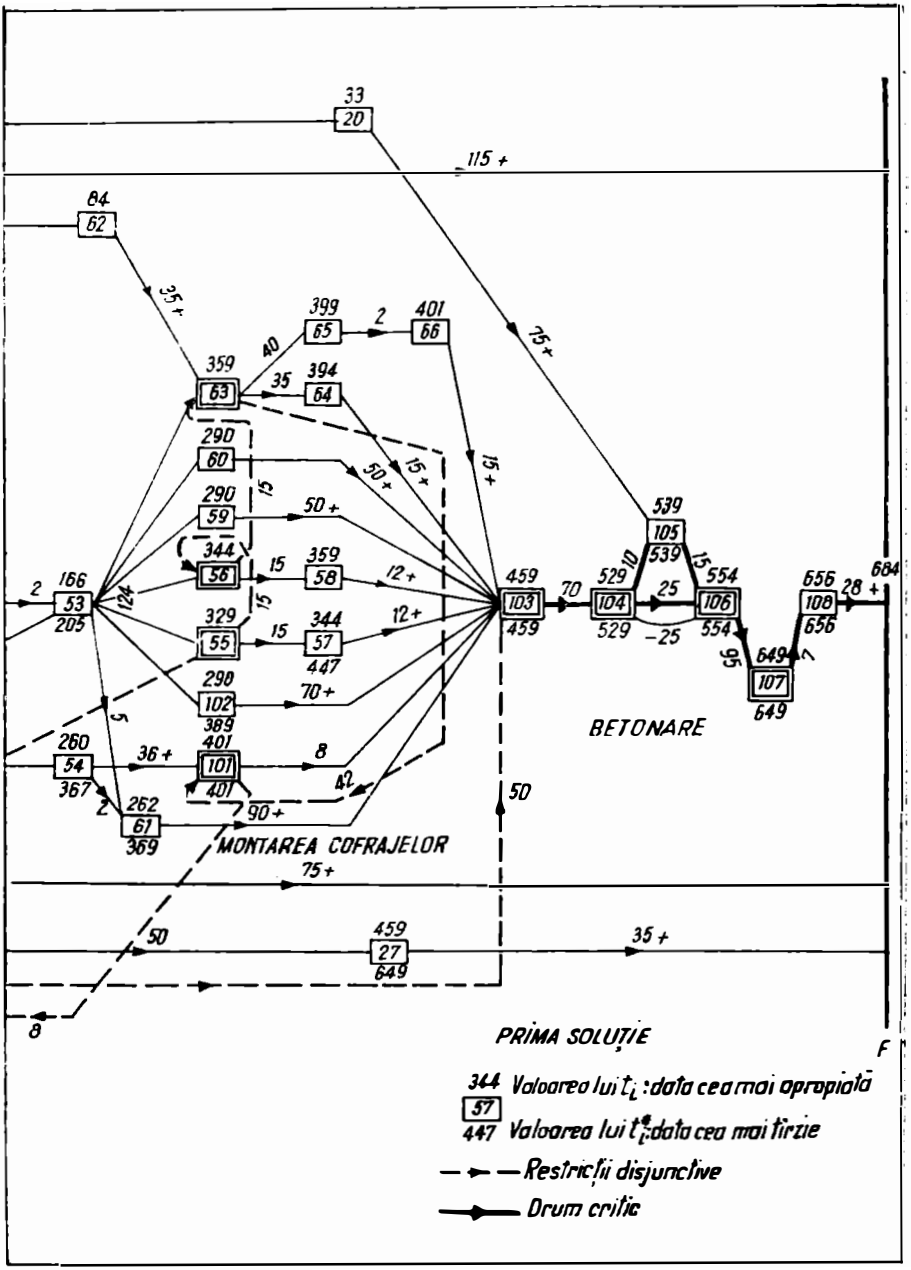

MONTAREA COFRAJELOR
BETONARE
PRIMA SOLUȚIE
344 Valoarea lui t_i : data cea mai apropiată
57
447 Valoarea lui t_i^* : data cea mai tîrzie
Restricții disjunctive
Drum critic

Fig. 2.40 b

Calculul datelor limită t_i^* sau al datelor „cele mai tîrzii" se face în continuare, fără a ţine seama de disjuncţii, pornind de la graful prevăzut cu arce disjunctive (punctate pe figură). Toate datele t_i^* nu figurează pe desen pentru a nu-l încărca prea mult. Această primă soluţie are deja o durată inferioară lui 12 h (684 minute).

Trecerea de la o soluţie la alta mai bună se face prin revizia şi explorarea sistematică :

— a ipotezelor asupra cadenţelor de lucru,

— a modului de tratare a restricţiilor disjunctive.

Pentru a comprima durata totală, trebuie accelerată execuţia sarcinilor drumului critic.

Eliminarea unei disjuncţii printr-o restricţie *potenţial* este o decizie arbitrară, şi se poate întotdeauna lua în consideraţie inversarea ordinii astfel impuse. Apriori, aceasta conduce la încercarea unui număr foarte mare de combinaţii. Pentru a elimina sistematic pe cele mai puţin bune, se poate utiliza regula următoare :

— parcurgînd arcele drumului critic de la origine, să se inverseze primul arc disjunctiv întîlnit ;

— să se refacă calculul acestui nou program fără a se atinge de celelalte arce disjunctive.

Acest procedeu se justifică cum urmează :

— inversarea unui arc nesituat pe drumul critic nu l-ar scurta pe acesta, căci el nu împrumută acest arc ; ea poate însă să-l lungească şi arcul devine atunci critic ;

— inversarea unui arc, eliminînd anumite disjuncţii, poate autoriza un program mai scurt ; ar conveni deci, în acelaşi timp, să se elimine restricţiile disjunctive devenite inutile sau acelea care ar putea să se opună unei astfel de ameliorări. Dar, în acest din urmă caz, arcele despre care este vorba devin critice şi vor fi deci reexaminate într-un stadiu următor.

Se vede că acest procedeu simplu nu elimină nici o soluţie, bună, dar nu ameliorează programul la fiecare iteraţie. El permite totuşi să se cîştige timp şi să obţinem rezultate bune în acest caz.

Pentru prima soluţie, sarcina 14 — lungă dar puţin importantă — ar întîrzia ansamblul operaţiilor. Ar fi suficient să dublăm efectivul corespunzător pentru a cîştiga 44 minute. Dar în soluţia 2 arcele disjunctive legînd sarcinile 23, 51 şi 2 ar deveni critice ; inversarea arcului 51 → 2 ar da soluţia 3. Practic, această soluţie ar fi cea mai rapidă : arbitrajele disjunctive situate dincolo de sarcina 15 ar fi

sensibil optimale, și rarele sarcini comprimabile situate pe drumul critic ar interveni la momente cînd încărcarea personalului ar fi vizibil foarte mare. Dar utilizatorul alege în definitiv o soluție mai puțin bună: pentru o pierdere de cîteva minute, este preferabil pentru motive de securitate să se execute împreună și mai devreme sarcinile 22, 25 și 26 (deplasarea și așezarea pasarelelor mobile de circulație). Figura 2.41 dă soluția reținută: durata totală s-a redus la 639 minute.

Obiectivul căutat — realizarea ciclului zilnic — ar putea fi deci atins, cu un efectiv inferior celui folosit înainte și aceasta cu prețul unei investiții mici față de cheltuielile în joc.

2.7. OPERAȚII CU DURATA ALEATOARE

Cititorul a luat cunoștință acum de aspectele principale pe care le oferă utilizarea unui graf pentru reprezentarea unui program de cercetări sau de producție, în cazul în care duratele operațiilor sînt cunoscute și sigure. Importanța unei astfel de aproximări a unui program de cercetări sau de dezvoltare este evidentă:

— Planificatorul sau organizatorul au, datorită folosirii grafului, o prezentare clară și simplă a programului în care apar interacțiunile diferitelor lucrări. Stabilirea grafului este deci, în sine, o primă fază foarte importantă, care permite să se precizeze desfășurarea operațiilor.

— Punerea în evidență a unuia sau a mai multor drumuri critice permite determinarea operațiilor care condiționează desfășurarea ansamblului programului. Aceste aplicații critice vor trebui deci, în cursul realizării, să fie supravegheate foarte de aproape și asupra lor se va îndrepta efortul principal.

— Operațiile diferite de cele ale drumului critic apar, din contră, mai puțin rigide și tolerează anumite întîrzieri relative la datele lor de punere în execuție (intervale de fluctuație, margini libere).

În practică, în foarte multe programe în primul rînd la cele de cercetare și de dezvoltare, duratele t_{ij} ale operațiilor sînt insuficient cunoscute și nesigure. Se pot prezenta atunci două cazuri: sau operațiile, despre care este vorba, nu sînt noi și se cunoaște pentru fiecare dintre ele într-un mod aproximativ legea de repartiție a probabilităților timpului operator, sau aceste operații sînt în întregime noi, sau foarte puțin cunoscute și nu se cunoaște legea de repar-

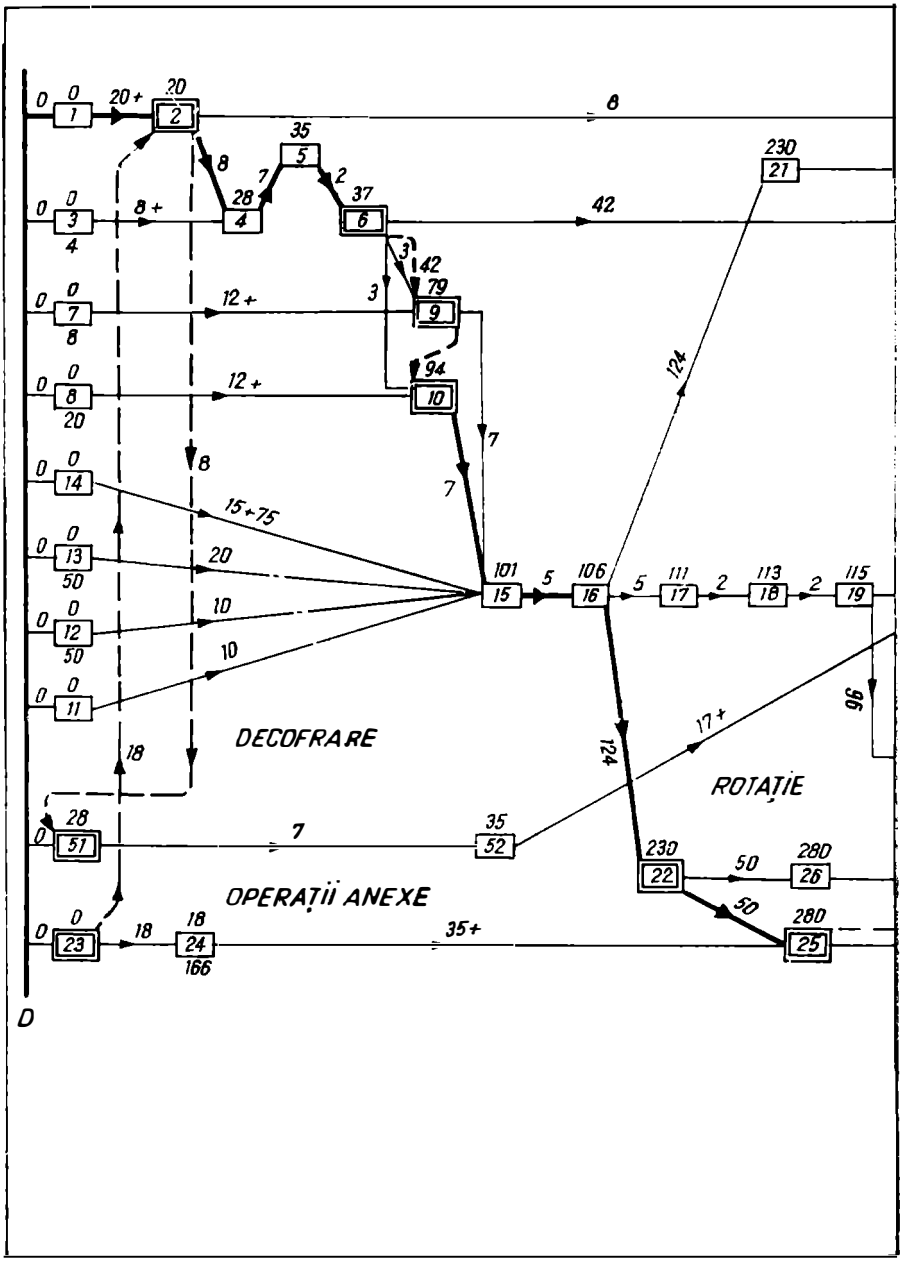


Fig. 2.41 a

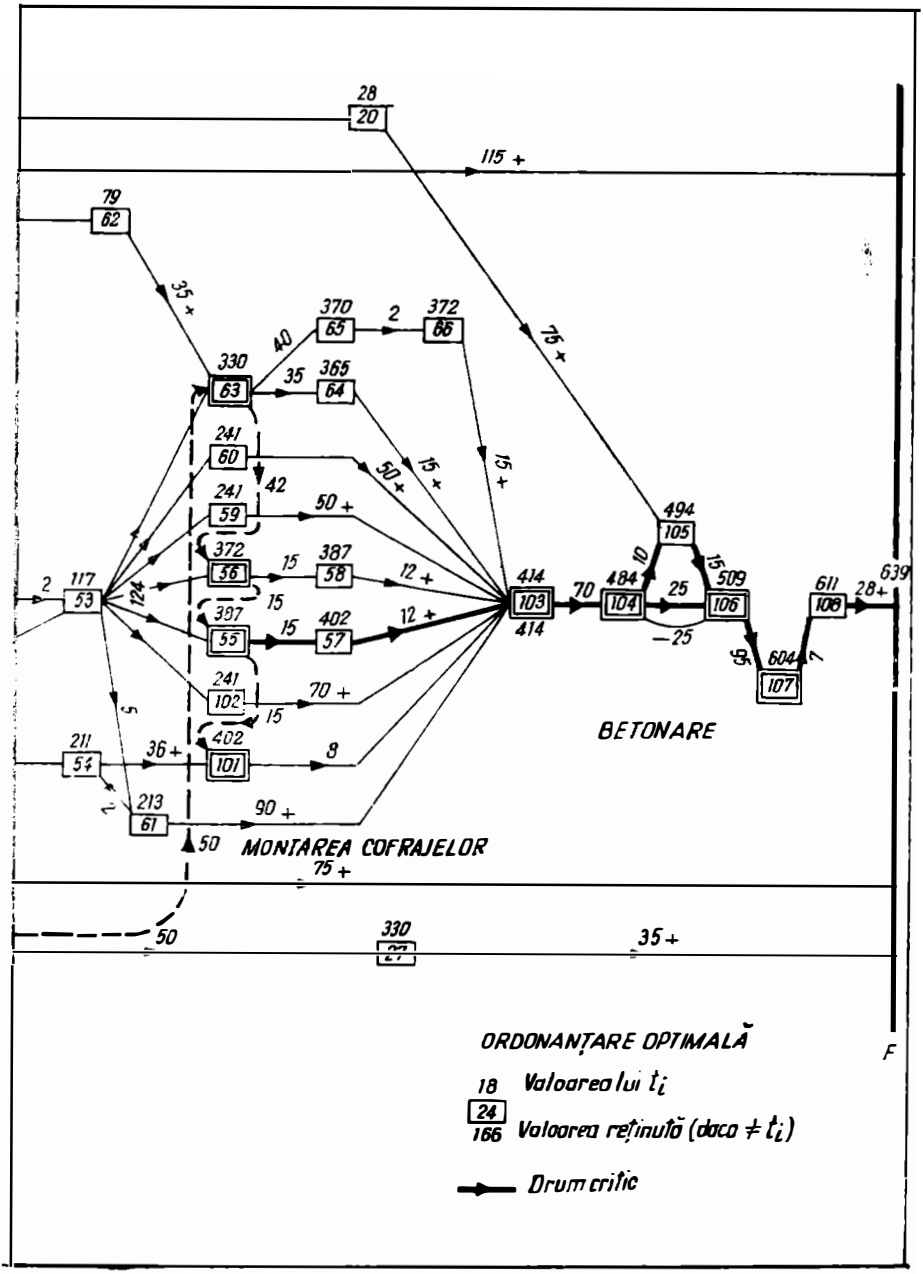

28
20
115 +
79
62
35 +
370
65
2
372
66
40
330
63
35
365
64
75 +
241
60
50 +
15 +
15 +
241
59
42
50 +
494
105
372
36
15
387
58
12 +
10
15
414
103
70
484
104
25
509
106
611
108
28+
639
414
397
55
15
402
57
12 +
−25
95
604
107
241
102
70 +
15
BETONARE
211
54
36 +
402
101
8
213
61
90 +
MONTAREA COFRAJELOR
50
75 +
330
35 +
ORDONANȚARE OPTIMALĂ
18 Valoarea lui t_i
24
166 Valoarea reținută (daca ≠ t_i)
Drum critic

Fig. 2.41 q

tiție a fiecărui timp operator. Primul caz corespunde, în general, programelor industriale de dezvoltare, al doilea — programelor de cercetare.

1) Dacă se cunosc repartițiile timpilor operatori, nu există dificultăți pentru determinarea duratei medii (speranța matematică,) și a dispersiei fiecărei operații.

Se obține astfel:

$$\bar{t}_{ij} \text{ și } \sigma^2_{ij}.$$

2) Dacă nu se cunosc distribuțiile timpilor operatori, se presupune, în metoda PERT, pentru motive de comoditate în calcule, că acești timpi operatori urmează o lege de repartiție β *).

Nu se poate justifica într-un mod riguros alegerea acestei legi, avînd o funcție de densitate de probabilitate de tip Gauss-Laplace, dar este mărginită la stînga și la dreapta.

Figura 2.42 dă curba care reprezintă o lege de probabilitate β. Legea β considerată în metoda PERT a fost aleasă astfel încît:

$$E(t) = \bar{t} = \frac{1}{6}(A + 4M + B), \tag{2.32}$$

$$\sigma_t^2 = \left[\frac{1}{6}(B - A)\right]^2, \tag{2.33}$$

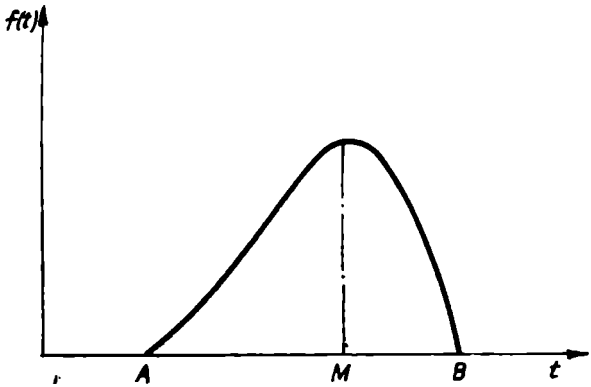


Fig. 2.42 Repartiția β.

*) Vezi în anexă, o relatare privind această lege.

A, B fiind marginile inferioară și superioară ale variabilei aleatoare t, M fiind valoarea cea mai probabilă sau moda.

Specialiștii responsabili cu fiecare operație sînt chestionați, punîndu-li-se următoarele trei întrebări:

1) La cît estimați durata minimală a operației P_{ij} (estimație optimistă)? Fie a_{ij} această durată minimală.

2) La cît estimați durata maximală a operației P_{ij} (estimație pesimistă)? Fie b_{ij} această durată maximală.

3) Care este durata cea mai probabilă a lui P_{ij} (moda)? Fie m_{ij} durata cea mai probabilă.

Astfel de informații fiind subiective se convine să fie strînse cu anumite precauții. În particular, se stabilește să se realizeze legături între diferitele informații provenite de la specialiștii într-o aceeași operație (de exemplu, un șef de laborator și adjuncții săi) care ar trebui eliberate de orice forme de presiuni exterioare, care ar putea deplasa estimațiile.

Deoarece nu cunoaștem nimic, vom presupune că aceste informații constituie estimații nedeplasate ale lui A_{ij}, B_{ij}, M_{ij}. Fie:

$$a_{ij}=\hat{A}_{ij}, \quad b_{ij}=\hat{B}_{ij}, \quad m_{ij}=\hat{M}_{ij}. \tag{2.34}$$

Putem scrie atunci

$$\hat{\bar{t}}_{ij}=\frac{1}{6}\left[\hat{A}_{ij}+4\hat{M}_{ij}+\hat{B}_{ij}\right]=\frac{1}{6}[a_{ij}+4m_{ij}+b_{ij}]. \tag{2.35}$$

Notația $\hat{\bar{t}}_{ij}$ are semnificația că valoarea celui de-al doilea membru al ecuației (2.35) constituie o estimație nedeplasată a valorii medii $\bar{t}_{ij}$; $\hat{\bar{t}}_{ij}$ este un estimator al lui $\bar{t}_{ij}$.

Din punct de vedere teoretic, nu avem dreptul să scriem

$$\hat{\sigma}_i^2=\left[\frac{\hat{B}_{ij}-\hat{A}_{ij}}{6}\right]^2=\left[\frac{b_{ij}-a_{ij}}{6}\right]^2, \tag{2.36}$$

$\left(\frac{b_{ij}-a_{ij}}{6}\right)^2$ nefiind o estimație a dispersiei σ_{ij}^2. Totuși luînd în

considerație aproximațiile făcute (asimilarea estimațiilor subiective cu estimațiile obiective) și ipotezele complet empirice admise mai înainte, nu este cu totul greșit de a lua ca estimație a dispersiei valoarea

$$\left[\frac{b_{ij} - a_{ij}}{6}\right]^2.$$

Am obținut astfel, cu un anumit număr de concesii la rigoare, estimații ale duratei medii a operației P_{ij} și a dispersiei timpului său operator. Vom reține aceste estimații și vom scrie suprimînd bara și/sau accentul circomflex :

$$t_{ij} = \frac{1}{6}(a_{ij} + 4m_{ij} + b_{ij}), \tag{2.37}$$

$$\sigma_{ij}^2 = \left(\frac{b_{ij} - a_{ij}}{6}\right)^2. \tag{2.38}$$

Avînd astfel pentru fiecare operație P_{ij} valoarea medie t_{ij} și dispersia σ_{ij}^2 a timpului operator, fie că sîntem în cazul în care se cunoaște legea de repartiție, fie că sîntem în cazul empiric, cînd se posedă numai informații apriori, se folosește metoda din 2.3 pentru determinarea valorilor medii ale evenimentelor E_i și a drumului critic (sau a drumurilor critice), afectînd fiecărui arc valoarea medie t_{ij} a timpului operator.

Într-adevăr, știm că valoarea medie a unei sume de variabile aleatoare este egală cu suma valorilor medii a fiecăreia dintre variabile :

$$E(X_1 + X_2) = E(X_1) + E(X_2), \tag{2.39}$$

$$E(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \ldots + E(X_n), \tag{2.40}$$

unde simbolul E reprezintă valoarea medie a variabilei aleatoare X_i.

Să reluăm exemplul din fig. 2.22 presupunînd că ne găsim în cazul nesigur.

Valorile afectate arcelor din fig. 2.22 vor reprezenta acum valorile cele mai probabile m_{ij}. Valorile a_{ij} și b_{ij} sînt date în tabelul 2.8, unde am calculat t_{ij} și σ_{ij}^2 prin formulele (2.37) și (2.38)

A fost reluat același exemplu din motive de simplificare a expunerii. Trebuie să remarcăm totuși că de fapt cele două probleme sînt diferite. Vom reproduce pe fig. 2.43 graful reprezentînd programul. Fiecare arc reprezentînd o operație este afectat cu valoarea t_{ij} calculată și care se poate citi pe tabelul 2.8. Numerele subliniate și înscrise aproape de vîrfurile grafului reprezintă acum valorile medii ale datelor evenimentelor E_i. Astfel evenimentul E_{10} se va produce la o dată medie 47,99, evenimentul E_{11} la o dată medie de 41,16 și evenimentul E_{12} care reprezintă terminarea lucrărilor la o dată medie de 60,82 *).

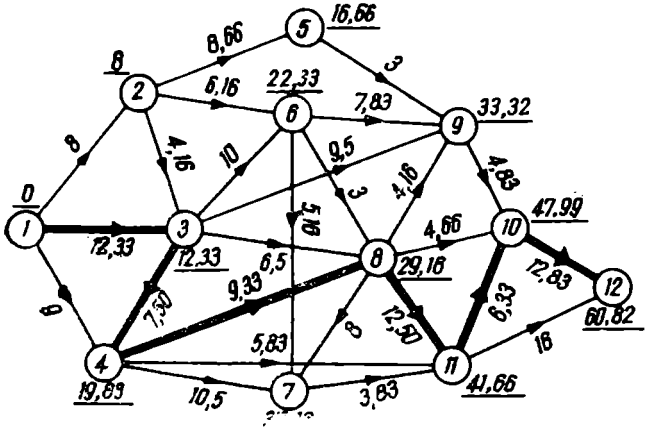


Fig. 2.43

Vom putea merge mai departe în cunoașterea programului, observînd că la capătul unui anumit număr de operații datele evenimentelor corespunzătoare sînt repartizate după legea normală, în virtutea *teoremei limită centrale* pe care o reamintim în cele ce urmează:

Fiind dat un șir de variabile aleatoare *independente*

$$X_1, X_2, \ldots, X_n$$

*) Se găsește că drumul critic al valorilor medii este același cu drumul critic al valorilor celor mai probabile (mode), dar acesta este un caz particular datorat valorilor introduse în exemplul nostru.

Tabelul 2.8

P_{ij}	a_{ij}	b_{ij}	m_{ij}	t_{ij}	σ^2_{ij}
$P_{1,2}$	5	11	8	8	1
$P_{1,3}$	6	16	13	12,33	2,77
$P_{1,4}$	6	12	9	9	1
$P_{2,3}$	3	6	4	4,16	0,25
$P_{2,5}$	4	12	9	8,66	1,77
$P_{3,6}$	3	10	6	6,16	1,36
$P_{3,4}$	5	12	7	7,50	1,36
$P_{3,6}$	6	14	10	10	1,77
$P_{3,8}$	4	11	6	6,5	1,36
$P_{3,9}$	7	14	9	9,5	1,36
$P_{4,7}$	7	16	10	10,5	2,25
$P_{4,8}$	8	12	9	9,33	0,44
$P_{4,11}$	4	7	6	5,83	0,25
$P_{5,9}$	2	4	3	3	0,11
$P_{6,7}$	4	7	5	5,16	0,25
$P_{6,8}$	2	4	3	3	0,11
$P_{6,9}$	5	10	8	7,83	0,69
$P_{7,11}$	2	5	4	3,83	0,25
$P_{8,7}$	7	9	8	8	0,11
$P_{8,9}$	3	6	4	4,16	0,25
$P_{8,10}$	2	6	5	4,66	0,44
$P_{8,11}$	7	16	13	12,50	2,25
$P_{9,10}$	3	6	5	4,83	0,25
$P_{10,12}$	8	17	13	12,83	2,25
$P_{11,10}$	5	9	6	6,33	0,44
$P_{11,12}$	9	19	17	16	2,77

cu dispersiile

$$\sigma_1^2,\ \sigma_2^2, \ldots,\ \sigma_n^2,$$

dacă dispersiile sînt finite și suma lor crește indefinit cu n, dar astfel încît fiecare raport

$$\sigma_i^2 / \sum_i \sigma_i^2$$

tinde la 0, atunci variabila

$$\xi_n = \frac{Z_n - E(Z_n)}{\sigma_{Z_n}} \text{ cu } Z_n = \Sigma X_i \tag{2.41}$$

urmează, la limită, o lege de repartiție normală redusă, oricare ar fi distribuțiile variabilelor X_i.

Această înseamnă că o sumă de variabile aleatoare independente, fiecare dintre ele avînd o repartiție oarecare, urmează, dacă numărul acestor variabile este suficient de mare, o lege normală (legea Gauss-Laplace), a cărei medie este suma mediilor variabile și a cărei dispersie este suma dispersiilor variabile *) :

$$E(Z_n) = E(X_1) + E(X_2) + \ldots . + E(X_n), \tag{2.42}$$

sau

$$\sigma_{Z_n}^2 = \sigma_{X_1}^2 + \sigma_{X_2}^2 + \ldots + \sigma_{X_n}^2. \tag{2.43}$$

Teorema limită centrală se aplică bine, dacă graful programului este suficient de mare pentru evenimentele de la sfîrșitul programului și în particular pentru evenimentul final, reprezentînd terminarea ansamblului lucrărilor. Trebuie totuși să remarcăm imediat că aceasta nu este valabilă decît cu condiția ca timpii operatori să fie variabile aleatoare *independente*, ceea ce se admite în general, dar care poate să nu se întîmple în anumite cazuri. În tot cazul, aceasta este o ipoteză care trebuie examinată în fiecare caz. Astfel, în exemplul nostru, data evenimentului Z_{12} este repartizată după

*) Sub rezerva condițiilor foarte generale care sînt satisfăcute în cazul în care se presupune că legile de repartiție sînt repartiții β.

legea Gauss-Laplace de medie 60,82 şi de dispersie egală cu suma dispersiilor timpilor operatori care compun drumul critic.

Numind $t_{E_{12}}$ sau mai simplu t_{12} data aleatoare a evenimentului E_{12}, avem

$$\sigma^2(t_{E_{12}}) = \sigma^2(t_{12}) = \sigma^2(t_{1,3}) + \sigma^2(t_{3,4}) + \sigma^2(t_{4,8}) + \sigma^2(t_{8,11}) + \sigma^2(t_{11,10}) + \sigma^2(t_{10,12})$$

sau

$$\sigma^2(t_{12}) = 2{,}77 + 1{,}36 + 0{,}44 + 2{,}25 + 0{,}44 + 2{,}25 = 9{,}51.$$

La fel, data evenimentului E_{10} este distribuită după legea Gauss-Laplace avînd valoarea medie 47,99 şi dispersia

$$\sigma^2_{10} = \sigma^2_{1,3} + \sigma^2_{3,4} + \sigma^2_{4,8} + \sigma^2_{8,11} + \sigma^2_{11,10} = 7{,}26.$$

Trebuie să mai observăm că în exemplul nostru sînt prea puţine operaţii pentru a putea aplica cu toată rigoarea teorema limită centrală *). Data evenimentului E_{12} a fost calculată numai cu şase operaţii critice. Dar grafurile programelor reale sînt, în general, mult mai importante şi calculul precedent se poate aplica practic.

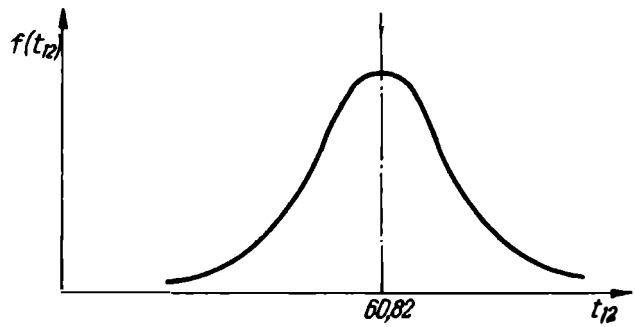


Fig. 2.44

Figura 2.44 arată repartiţia datei evenimentului E_{12}.

*) Totuşi, dacă se admite ipoteza că variabilele aleatoare considerate pe arcele grafului sînt repartizate după legea β, se poare arăta că suma acestor variabile urmează foarte sensibil o lege normală, chiar dacă se face suma unui număr mic de astfel de variabile.

Am calculat astfel datele medii de realizare ale evenimentelor E_i și cunoaștem repartițiile lor. Ce se poate spune despre datele limită t_i^* ?

Prin definiție, data t_i^* pentru evenimentul E_i este data limită de începere a operațiilor P_{ij} urmînd evenimentului E_i, dată a cărei depășire provoacă întîrzierea întregului program. Timpul mediu necesar pentru realizarea operațiilor situate între E_i și E_n se obține căutînd pe graf drumul de valoare medie maximală de la E_i la E_n. Acest timp mediu este deci pur și simplu valoarea drumului maximal de la E_i la E_n pe graful programului.

Dacă evenimentul E_i nu este prea aproape de sfîrșitul programului, se poate spune, ca mai înainte, că timpul mediu necesar pentru realizarea operațiilor situate între E_i și E_n este distribuit după o lege normală a cărei dispersie este suma dispersiilor timpilor operatori ai operațiilor compunînd drumul maximal de la E_i la E_n. Dacă evenimentul E_i este vecin cu evenimentul final, nu se poate spune nimic referitor la repartiția timpului mediu de mai înainte.

Să reluăm încă o dată graful din fig. 2.43 și datele tabelului 2.8 și să considerăm evenimentul E_6. Calculul timpului mediu necesar pentru realizarea operațiilor situate între E_6 și E_{12} s-a făcut căutînd, prin metoda din 2.5, drumul de valoare maximală de la E_6 la E_{12}.

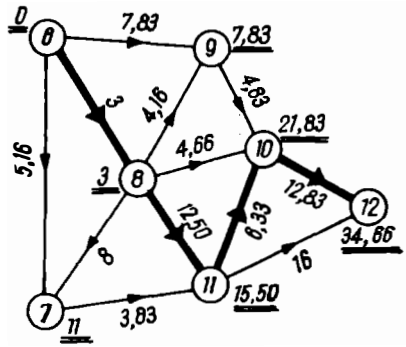


Fig. 2.45

Noi n-am reprezentat pe graful figurii 2.45 decît operațiile posterioare lui E_6. Valoarea drumului maximal de la E_6 la E_{12} este 34,66. Acesta este și timpul mediu necesar pentru realizarea operațiilor posterioare lui E_6.

Dispersia distribuției acestui timp mediu este

$$\sigma^2_{6.8} + \sigma^2_{8.11} + \sigma^2_{11.10} + \sigma^2_{10.12},$$

fie

$$0{,}11 + 2{,}25 + 0{,}44 + 2{,}25 = 5{,}05.$$

Forma repartiţiei presupuse normale (nu sînt decît patru variabile aleatoare, ceea ce n-ar fi suficient în toată rigoarea pentru aplicarea teoremei limită centrale) este aceea din fig. 2.46. Dar ştim că data terminării lucrărilor t_{12} are o valoare medie egală cu 60,82. Se poate lua atunci ca dată limită t_6^* data 60,82 — 34,66 = 26,16. Această valoare se va lua în metoda PERT.

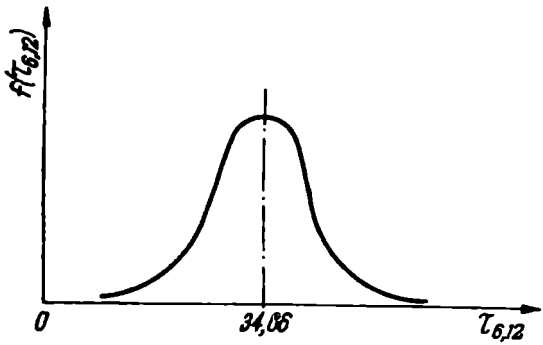


Fig. 2.46

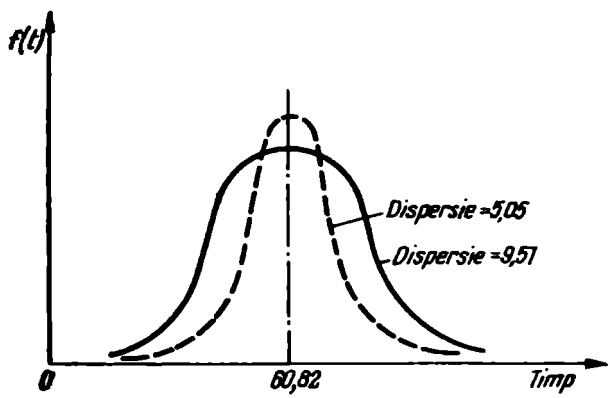


Fig. 2.47

S-a reprezentat în fig. 2.47, ceea ce se petrece în E_{12} dacă se face pornirea operaţiilor $P_{6.9}$, $P_{6.8}$ şi $P_{6.7}$ la data 26,16. Această dată limită 26,16 ne convine, pentru că folosind-o nu riscăm să perturbăm prea mult data de realizare a ansamblului lucrărilor. Bineînţeles,

siguranța ar fi mai mare luînd ca dată limită a lui E_6, de exemplu, valoarea 24 (fig. 2.48). Sîntem mai siguri atunci că data lui E_{12} va fi dictată de drumul critic inițial : [1, 3, 4, 8, 11, 10, 12] (fig. 2.43), mai curînd decît de operațiile drumului [6, 8, 11, 10, 12] (fig. 2.45). Orice ar fi, ne vom conforma metodei PERT și vom lua ca dată limită a evenimentului E_6 data 26,16. Astfel, în cazul general, data limită t_i^* a unui eveniment E_i se obține scăzînd din data medie t_n a evenimentului final E_n timpul mediu necesar realizării operațiilor posterioare lui E_i.

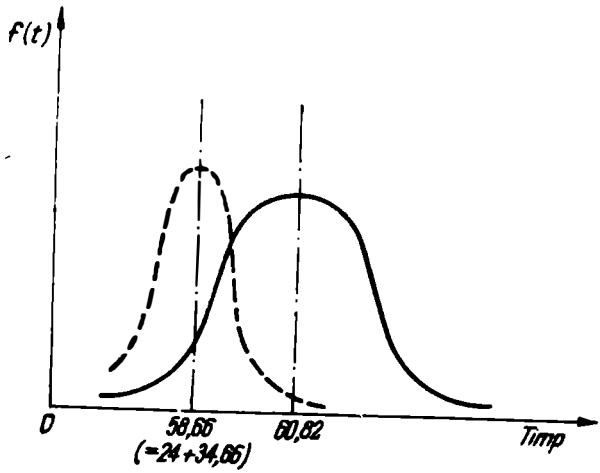


Fig. 2.48

Se procedează deci ca în 2.4, unde timpii operatori erau siguri, dar utilizînd de data aceasta timpii operatori medii (fig. 2.43) :

$$t_i^* = t_n - \tau_{i,n}, \tag{2.44}$$

dacă $\tau_{i,n}$ este timpul mediu necesar realizării operațiilor posterioare lui E_i.

În final, cunoaștem pentru fiecare eveniment data sa medie de realizare t_i și repartiția corespunzătoare, la fel data sa limită t_i^*. Algoritmii folosiți vor fi cei din 2.5, cu deosebirea că timpii operatori, care erau considerați determinați, sînt acum timpi operatori medii.

Vom defini un interval de fluctuație *mediu* (fig. 2.49)

$$[t_i,\ t_i^*] \tag{2.45}$$

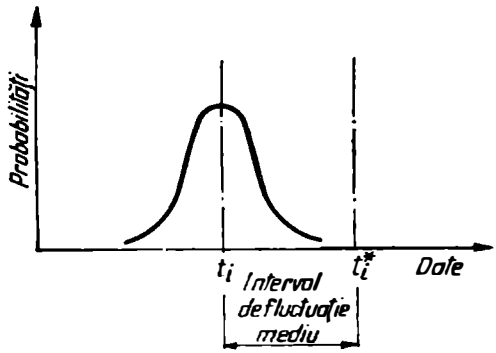


Fig. 2.49

pentru evenimentul E_i și o margine liberă *medie* pentru operația P_{ij} :

$$t_j - t_i - t_{ij}. \tag{2.46}$$

Trebuie să remarcăm că se desemnează tot prin *interval de fluctuație* cantitatea $t_i^* - t_i$, cînd aceasta nu conduce la confuzii.

2.8. REALIZAREA UNUI CALENDAR

Stabilirea unui calendar constă în fixarea datelor anumitor evenimente și, în particular, a evenimentului final, corespunzător realizării programului. Evenimentele interesante de luat în considerație sînt acelea ale drumului critic, pentru că ele condiționează imperativ realizarea programului. Cunoscînd distribuția datei fiecărui eveniment de la sfîrșitul programului, este ușor de evaluat probabilitatea realizării sau a nerealizării acestor evenimente la data fixată în calendar, cu atît mai mult cu cît repartițiile sînt, după cum s-a văzut înainte, normale sau cvasinormale.

Să reluăm exemplul din fig. 2.43 și să presupunem că este vorba de programul construcției unei vile și că, din diverse motive, cum-

părătorul vilei a fixat arhitectului sau antreprenorului data 63 pentru livrarea cheilor în mînă. Această clauză a fost adăugată la contract şi o depăşire a datei prevăzute generează pentru antreprenor o penalizare proporţională cu întîrzierea în livrare. Acesta, înainte de a modifica cîte ceva la programul său, va evalua riscul de depăşire a scadenţei. Dacă contractul prevede livrarea lucrărilor la data 63, se va evalua riscul unei întîrzieri în livrare :

E_{12} are o dată t_{12} repartizată după legea Gauss-Laplace cu valoarea medie 60,82 şi dispersia $\sigma_{12}^2 = 9{,}51$.

Variabila redusă

$$x = \frac{t_{12} - 60{,}82}{\sigma_{12}}$$

urmează legea normală redusă.

Pentru $t_{12} = 63$,

$$x = \frac{63 - 60{,}82}{3{,}085} = 0{,}706 \approx 0{,}7$$

şi se citeşte, pe tabelul funcţiei de repartiţie a legii normale reduse, probabilitatea corespunzătoare : 0,75. Astfel, probabilitatea realizării înainte de data 63 este 0,75 ; există deci 75 de ocazii favorabile la 100 ca vila să fie realizată înainte sau la data 63. Probabilitatea nerealizării la data 63 este $1 - 0{,}75 = 0{,}25$; există deci 25 ocazii favorabile la 100 pentru ca vila să nu fie realizată la data 63. Riscul de a fi penalizat este deci departe de a fi neglijabil pentru antreprenorul care a acceptat această dată de livrare *).

Dacă contractul prevede livrarea lucrărilor la data 64, probabilitatea nerealizării este $1 - 0{,}85 = 0{,}15$.

Dacă contractul prevede livrarea lucrărilor la data 65, probabilitatea nerealizării este $1 - 0{,}91 = 0{,}09$.

În sfîrşit, dacă data pusă în contract este 66, probabilitatea nerealizării la data prevăzută nu este mai mare decît $1 - 0{,}95 =$

*) Această expunere îşi datorează părţile ei esenţiale articolului [5] din bibliografie.

= 0,05. Astfel riscul de a nu onora contracul nu este pentru antreprenor decît de 5%.

Aceste rezultate sînt foarte interesante pentru antreprenor:

— Dacă el are posibilitatea de a face să se accelereze lucrările, va examina, potrivit datei puse în contract, dacă este cazul de a face aceasta sau nu. Va ţine cont în această decizie de faptul că orice accelerare a lucrărilor antrenează în general o creştere a costului acestora.

— Dacă nu are posibilitatea de a face să se accelereze lucrările, îi va fi posibil atunci să vadă într-un mod precis dacă are interesul să accepte sau să refuze contractul ţinînd seama de data fixată şi de preţul fixat prin convenţie pentru penalizare.

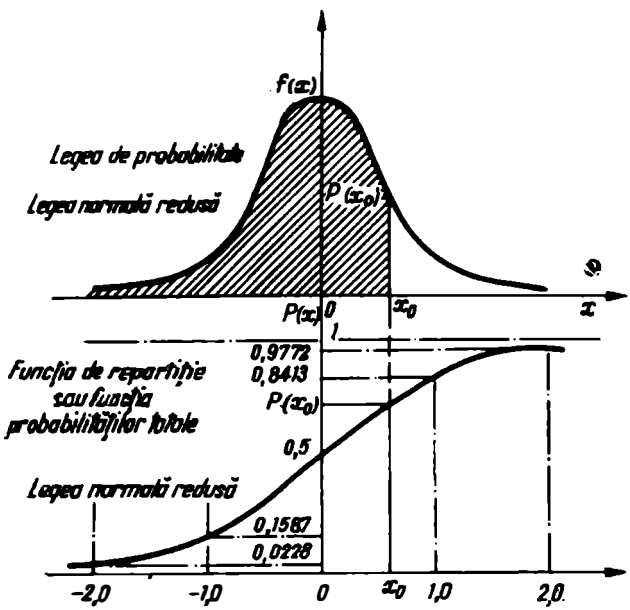


Fig. 2.50

Figura 2.50 dă aspectul legii de probabilitate şi a funcţiei de repartiţie a legii normale reduse.

2.9. UTILIZAREA UNUI CALCULATOR ELECTRONIC

Exemplele date în paragrafele precedente erau exemple foarte simple de programe care nu comportau decît un număr foarte mic de operaţii. În practică, programele de cercetare sau de dezvoltare, mai ales cînd analiza este foarte fină, comportă zeci şi uneori sute de operaţii. Se impune în acest caz folosirea unui calculator electronic.

Două aspecte merită a fi subliniate : evaluarea iniţială a unui program şi controlul unui program în curs de realizare.

2.9.1. EVALUAREA INIŢIALĂ A UNUI PROGRAM

Metoda expusă permite, după cum am văzut, pornind de la un proiect de program, să obţinem indicaţiile următoare :

— data de realizare medie t_i şi data limită t_i^* ale diverselor evenimente E_i ;

— intervalele medii de fluctuaţie ale evenimentelor şi marginile libere ale operaţiilor necritice ;

— probabilitatea realizării unui calendar prestabilit şi aceasta pentru evenimentele de la sfîrşitul programului.

Dacă proiectul programului este satisfăcător, adică dacă probabilitatea de realizare a unui calendar prestabilit este suficient de mare, acest proiect este adoptat şi programul trece în execuţie. În caz contrar se poate pune problema remanierii lui şi pentru aceasta se va căuta prin simulare să se reducă timpii operatori ai operaţiilor critice, alocîndu-le de exemplu resurse suplimentare, poate în detrimentul operaţiilor cu margini libere importante.

În sfîrşit, cu sau fără schimbări, va putea fi stabilit un program coerent răspunzînd bine diverselor imperative.

2.9.2. CONTROLUL UNUI PROGRAM ÎN CURS DE REALIZARE

Pe măsura avansării programului datele reale înlocuiesc estimaţiile mai mult sau mai puţin precise făcute înainte. Datele noi se introduc în calculator, ceea ce permite un control permanent al programului, precizînd evoluţia sa viitoare şi ţinînd cont de desfăşurarea sa reală. Astfel se poate, pentru respectarea termenelor impuse de un contract, să se modifice sau să se accelereze anumite operaţii. Responsabilul execuţiei programului are deci în mînă un instru-

ment de previziune şi de control care îi permite să ia în timpul dorit, cînd este necesar, toate deciziile de corectare care se impun (fig. 2.51).

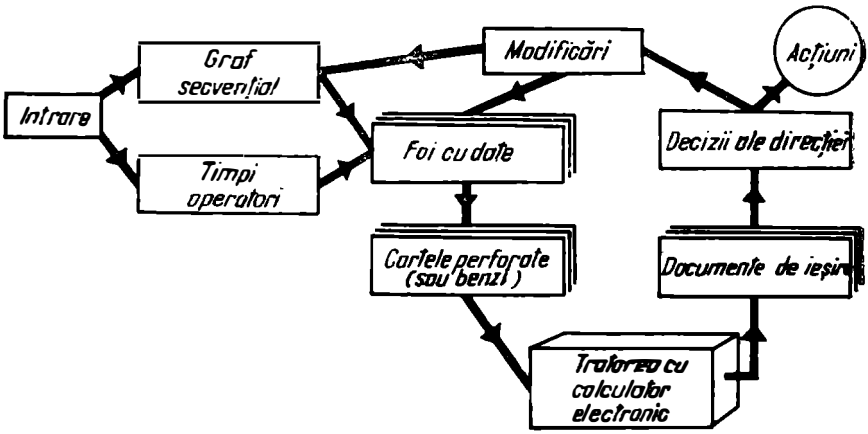


Fig. 2.51

Forma documentelor de intrare şi de ieşire poate fi foarte variată şi poate să se adapteze, eventual, la necesităţile particulare ale fiecărui tip de program. Luînd de o parte tabelul complet al estimărilor (tabelul 2.9), care va fi într-o oarecare măsură documentul de lucru de bază al metodei PERT, se poate examina producţia automată a diverselor documente sau grafice :

— lista evenimentelor sau a operaţiilor critice,

— clasamentul evenimentelor sau al operaţiilor în funcţie de intervalul de fluctuaţie sau de marginea liberă ;

— un grafic cu abaterile (în plus sau în minus) ale datelor evenimentelor calculate, în raport cu datele corespunzătoare fixate în registrul de scadenţă dorit sau calculat anterior ;

— un grafic indicînd vizual progresul prevăzut al programului : datele de scadenţă calculate ale evenimentelor puse împreună cu intervalul de fluctuaţie corespunzător ;

— graficul lui Gantt al operaţiilor programului indicînd în mod egal intervalele de fluctuaţie.

În sfîrşit, este important de subliniat că programul-maşină, element central al metodei, este făcut o dată pentru totdeauna, permiţînd adaptările eventuale pentru informaţiile de ieşire (natura

şi forma documentelor dorite, prezentarea etc.). În cazul în care programul studiat comportă un număr relativ restrîns de operaţii elementare, metoda poate fi aplicată cu rezultate bune fără ajutorul unui calculator, cel puţin pentru activitatea de evaluare iniţială a programului. Pentru funcţia *control al programului* din contră, tratamentul manual al datelor devine repede nepracticabil dacă se urmăreşte efectuarea controalelor frecvente şi rapide.

Tabelul 2.9

Eveniment nr.	Data de realizare aşteptată t_i		Data limită de realizare t_i^*		Interval de fluctuaţie mediu $t_i^* - t_i$	Scadenţa iniţială	Probabilitatea scadenţei
	Medie	Dispersie	Medie	Dispersie			
50	92	38	92	0	0	82	0,05
51	85	35	85	3	0	77	0,09
54	74	29	82	4	8	73	0,42
52	47	25	74	7	27	70	1,0
53	70	31	70	7	0	60	0,02
57	56	23	64	10	8	55	0,42

...
↓
E_1 (punerea în execuţie a programului)

Tabelul 2.9, „Informaţii de ieşire", corespunde unei părţi a grafului din fig. 2.52.

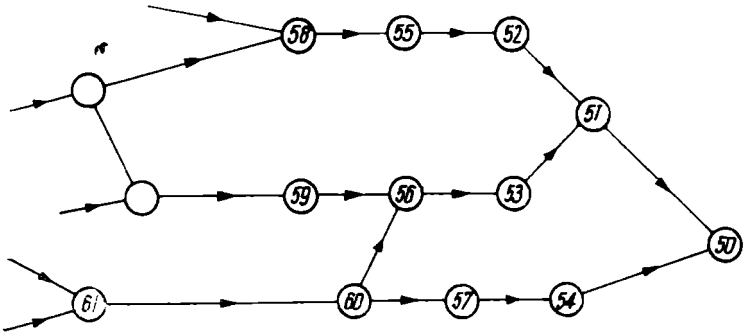


Fig. 2.52

În concluzie, meritul esenţial al metodei PERT şi al variantelor sale constă în posibilitatea de a-ţi da seama, pe măsură ce se desfăşoară lucrările, de deplasarea urgenţelor şi de punctele unde trebuie făcut un efort deosebit. De fapt, drumul critic nu este întotdeauna acelaşi. El poate evolua în funcţie de fapte imprevizibile. Rămîne întotdeauna posibil să se examineze repercusiunile lor asupra datei probabile de terminare a lucrărilor, să se introducă sarcini noi (subtratate, de exemplu) şi să se evalueze incidenţa lor. În cîteva cuvinte, este vorba de un instrument îmbunătăţit şi perfecţionat permanent, care permite orientarea acţiunii la fiecare moment, gradînd eforturile.

3

GENERALIZAREA METODEI PERT

3.1. INTRODUCERE

În acest capitol se va prezenta o generalizare a metodei PERT. Modelul este acum un model stochastic, aplicîndu-se bine în special programelor de cercetare, pentru care nu este întotdeauna posibil să se stabilească un graf bine definit.

3.2. EVENIMENTE DECIZIONALE *)

În multe programe de cercetare sau de dezvoltare anumite evenimente au o semnificaţie deosebită, în sensul că de rezultatul lor depinde desfăşurarea ulterioară a programului. Altfel spus, nu se poate stabili un program, pentru că de rezultatul anumitor operaţii sau al anumitor evenimente depinde conducerea proiectului. Astfel de evenimente se vor numi *decizionale*. Se pot găsi mai multe dintre acestea în acelaşi program. Evenimentele decizionale intervin constant în programele de cercetare unde experienţele cerute depind de rezultatele anumitora dintre ele. Ele se întîlnesc de asemenea în programele de dezvoltare.

Un exemplu simplu va permite cititorului de a situa mai bine problema. Serviciul geologic al unei companii miniere, după o serie de măsurări geofizice pe teren, a localizat un zăcămînt important de plumb într-o regiune determinată din Cévennes. Inginerul geolog estimează tonajul zăcămîntului la 2 000 000 tone şi conţinutul său mediu, după eşantioanele găsite şi rezultatele cîtorva sondaje efectuate, la 2,5% Pb. Direcţia Companiei este interesată de acest zăcămînt şi datorită optimismului geologului, decide crearea puţurilor

*) În 3.2 — 3.7 am utilizat în special lucrările lui Howard Eisner [18].

de extracţie şi, eventual, a unei instalaţiii de spălare. Se stabileşte atunci un program de lucrări în care este prevăzută, evident, o campanie de sondaje sistematice. De rezultatele acestei campanii vor depinde operaţiile ulterioare ale programului. Într-adevăr, importanţa şi alegerea instalaţiilor miniere vor fi diferite, după cum tonajul şi calitatea zăcămîntului răspund sau nu speranţelor ivite. Se va putea admite chiar că stabilirea unei instalaţii de spălare nu este necesară dacă importanţa zăcămîntului este prea mică; minereul va fi transportat atunci cu camioane şi pe calea ferată la uzina cea mai apropiată a companiei, care îşi va asuma sarcina tratării sale. Din acest exemplu se vede că nu există numai un program de lucrări, ci mai multe, alegerea unuia dintre ele depinzînd de rezultatele campaniei de sondaje. Rezultatul sondajelor este evenimentul decizional, în acest exemplu.

Pentru simplificare, să presupunem că nu există decît trei eventualităţi referitoare la rezultatele campaniei de sondaje:

1) zăcămînt foarte important justificînd construcţia a trei puţuri (dintre care două de aerisire şi de coborîre a personalului şi unul de extracţie) şi stabilirea unei instalaţii de spălare;

2) zăcămînt de importanţă mijlocie care nu necesită decît două puţuri;

3) zăcămînt puţin important necesitînd numai două puţuri şi mijloace de exploatare reduse.

Operaţiile necesare punerii în exploatare sînt următoarele:

a) obţinerea permisului de exploatare;

b) stabilirea unei piste de 6 km;

c) transportul şi instalarea la baza construcţiei a două sondeze;

d) crearea clădirilor provizorii pentru biroul de planuri şi locuinţa muncitorilor sondori;

e) gudronarea pistei;

f) aducerea apei;

g) campania de sondaje;

h_1) săparea şi echiparea a trei puţuri;

h_2) săparea şi echiparea a două puţuri;

i_1) transportul şi instalarea la bază a materialului de exploatare tip 1;

i_2) transportul şi instalarea la bază a materialului de exploatare tip 2;

i_3) transportul şi instalarea la bază a materialului de exploatare tip 3;

j_1) construcţia birourilor şi a locuinţelor muncitorilor şi inginerilor;

j_2) construcţia birourilor şi a locuinţelor muncitorilor şi inginerilor;

j_3) construcţia birourilor şi a locuinţelor muncitorilor şi inginerilor;

k) trasări şi amenajarea fondului;

l) construcţia unei instalaţii de spălare.

Obiectivul programului este punerea în exploatare a zăcămîntului. Traseurile invocate în operaţia k sînt traseuri strict necesare începerii exploatării. În sfîrşit, operaţia „Construcţia de locuinţe" pentru muncitori nu este de aceeaşi importanţă cu a reşedinţei miniere.

Vom reuni cele trei programe de lucrări diferite într-unul singur. Obţinem atunci graful *generalizat* sau graful *stochastic* din fig. 3.1.

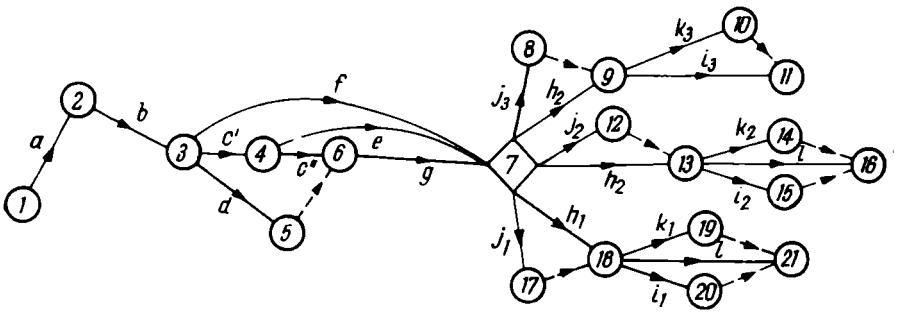


Fig. 3.1

Operaţia c a fost fracţionată în c' şi c'', deoarece se presupune că nu se poate întreprinde gudronajul drumului înaintea trecerii sondezelor. Operaţiile virtuale, punctate pe graf, au fost introduse respectînd regulile stabilite în capitolul 2. Evenimentul 7, care este eveniment decizional al acestui graf stochastic, este reprezentat printr-un romb.

Există pe acest graf trei evenimente terminale: E_{11}, E_{16} şi E_{21}. Este interesant acum să căutăm probabilităţile respective ale celor trei evenimente terminale. Dacă nu se predă nici o informaţie suplimentară, se poate admite arbitrar că probabilităţile lor respective vor fi 0,33. Dar inginerul geolog poate avea destule motive pentru

a crede că se găsește foarte probabil în eventualitatea 1. I se va atribui atunci evenimentului E_{21} o probabilitate de 0,75, evenimentului E_{16} probabilitatea 0,10 și evenimentului E_{11} probabilitatea 0,15. Astfel, planificatorul va putea spune că există 75 cazuri favorabile din 100 de a se găsi în eventualitatea 1 și de a avea o durată medie de lucrări corespunzînd evenimentului E_{21}.

Acest exemplu simplu, neavînd de altfel decît un raport îndepărtat cu problemele ridicate de punerea reală în exploatare a unui zăcămînt, a permis cititorului să înțeleagă în ce constă un eveniment decizional și cum se poate el reprezenta pe un graf de program.

3.3. CÎTEVA PRECIZĂRI ASUPRA TERMINOLOGIEI FOLOSITE

Introducerea noțiunii de eveniment decizional permite luarea în considerație a alternativelor care se prezintă în desfășurarea anumitor faze ale unui program, multe dintre activități fiind cercetări de existență și căutînd să demonstreze că anumite relații există sau nu.

Două drumuri care pleacă dintr-un eveniment decizional se vor numai *conjunctive*, dacă trebuie efectuate amîndouă operațiile pe care ele le reprezintă. Dacă trebuie realizată numai una sau alta dintrele ele, exclusiv, ele se vor numi *disjunctive* (fig. 3.2). Arcele sau drumurile 1 și 2 sînt aici disjunctive.

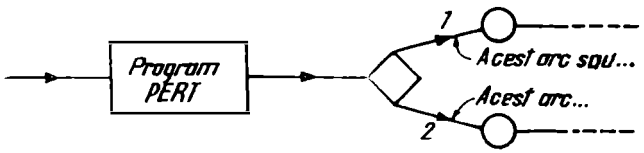


Fig. 3.2

Graful de tip PERT introdus în capitolul 2 poate fi considerat ca un caz particular al grafului stochastic mai general, deoarece graful PERT nu conține drumuri conjunctive.

Două configurații speciale ale grafului stochastic merită puțină atenție. Acestea sînt :

— dependența între drumurile conjunctive ;

— confluențele drumurilor conjunctive.

1) Dependența între drumuri conjunctive are loc cînd alegerea unei operații de efectuat depinde de răspunsul unui eveniment decizional situat pe un drum conjunctiv. Acest caz este ilustrat de fig. 3.3. Drumurile 1 și 2 sînt drumuri conjunctive care conduc la evenimentele decizionale B și respectiv C.

Să presupunem acum, că dacă răspunsul lui B este negativ, operațiile ulterioare depind de răspunsul lui C. Un mijloc de a reprezenta aceasta este repetarea pe graf a evenimentului decizional C, ceea ce s-a făcut (fig. 3.3) în C_1. Trebuie observat că C și C_1 sînt identice și că C_1 trebuie să se situeze la aceeași dată cu C, sau după el.

2) A doua configurație specială a grafului stochastic este aceea a confluenței de drumuri conjunctive. Într-un vîrf al grafului ajung două sau mai multe drumuri conjunctive, după ce fiecare dintre ele a trecut printr-un eveniment decizional. Evenimentul D furnizează un astfel de exemplu (fig. 3.3). În acest exemplu, drumurile

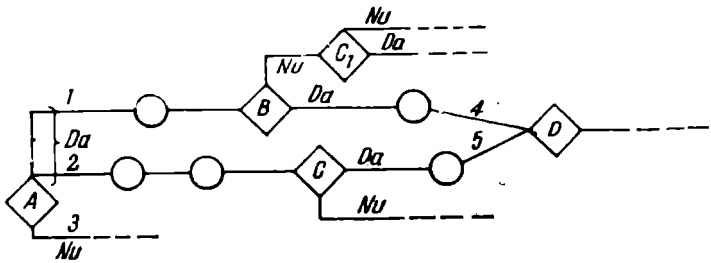


Fig. 3.3

4 și 5 ajung la D și pentru ca D să fie atins este necesar ca răspunsurile lui B și C să fie ambele afirmative.

3.4. ENUMERAREA EVENIMENTELOR TERMINALE POSIBILE

Deoarece graful stochastic permite reprezentarea alternativelor, este clar că nu toate evenimentele terminale sînt realizabile. Pot apărea anumite restricții.

Dacă simbolul $\oplus$ reprezintă *operaţia sumă disjunctivă* şi simbolul $\cap$ *operaţia intersecţie*, expresia următoare indică, sub formă logică, mulţimea evenimentelor terminale posibile ale programului

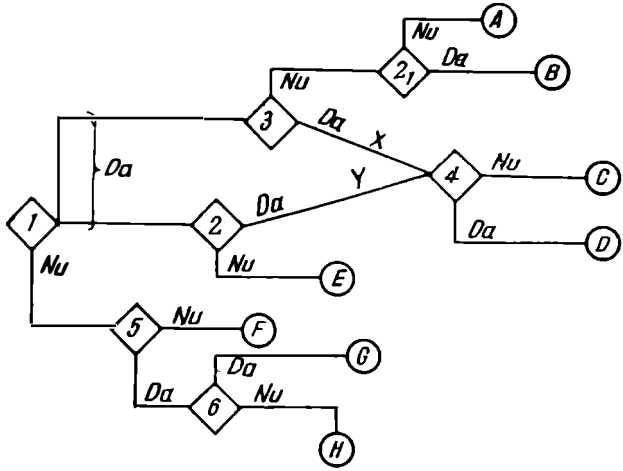


Fig. 3.4. Pe acest graf sînt reprezentate numai evenimentele decizionale prin excluderea evenimentelor normale.

de cercetări din fig. 3.4. Evenimentele terminale posibile sînt :

$$\{[(A \oplus B) \oplus X] \cap (Y \oplus E)\} \oplus \{(G \oplus H) \oplus F\} \tag{3.1}$$

sau

$$X \cap Y = C \oplus D. \tag{3.2}$$

Pornind de la expresia (3.1), obţinem evenimentele terminale posibile :

(A şi Y)	(X şi Y) = (C sau D)	
(A şi E)	(X şi E)	
(B şi Y)	G	(33)
(B şi E)	H	
	F	

Dependenţa dintre drumurile conjunctive reprezentate prin evenimentele decizionale 2 şi 2_1 restrînge evenimentele finale posibile,

pe anumite dintre ele făcîndu-le imposibile. Observînd că (X şi Y) este egal cu (C sau D), lista definitivă a evenimentelor terminale posibile este atunci :

$$\begin{array}{c} A \text{ şi } E \\ B \text{ şi } Y \\ C \\ D \\ X \text{ şi } E \\ G \\ H \\ F \end{array} \qquad (3.4)$$

Acum, după ce toate evenimentele posibile au fost enumerate, se va căuta clasamentul acestora în termeni de probabilităţi de realizare.

3.5. PROBABILITATEA EVENIMENTELOR TERMINALE

Probabilităţi apriori sînt acum afectate fiecăreia din alternativele evenimentelor decizionale. Este ceea ce am făcut în exemplul din 3.2, atribuind eventualităţii 1 probabilitatea apriorică 0,75 şi eventualităţilor 2 şi 3 probabilităţile 0,10 şi respectiv 0,15. În legătură cu aceasta, trebuie remarcat că un eveniment decizional poate conduce la mai multe eventualităţi, trei în exemplul din 3.2, dar că este întotdeauna posibil să se introducă în graf numai evenimente decizionale cu două eventualităţi, ca în fig. 3.4.

Graful din fig. 3.4 devine astfel acela din fig. 3.5 :

Eveniment final	Probabilitatea
D	0,2058
X şi E	0,1960
F	0,15
B şi Y	0,126
H	0,09
C	0,0882
A şi E	0,084
G	0,06

Entropia $H = 2{,}88$

$H_{max} = 3$

$E = 0{,}96$

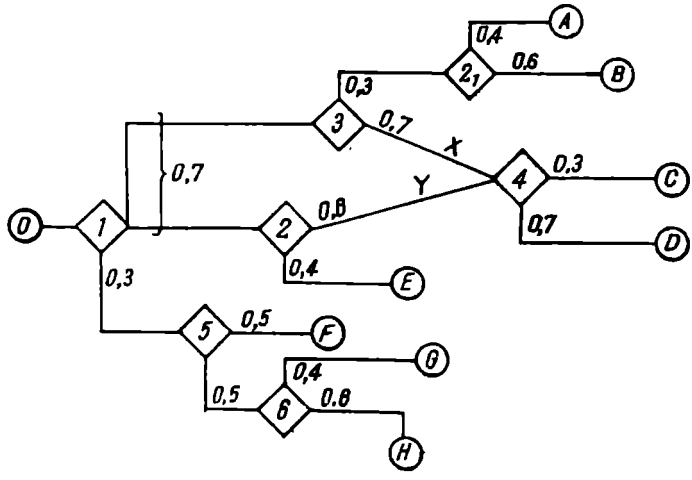


Fig. 3.5

După cum s-a indicat mai înainte, graful de tip PERT apare ca un caz particular al grafului stochastic în care unui drum disjunctiv sau unei mulțimi de drumuri conjunctive, pentru fiecare eveniment decizional, îi este afectată o probabilitate egală cu 1.

Probabilitățile evenimentelor terminale ale grafului din fig. 3.5 pot fi calculate acum cu ajutorul probabilităților apriorice ale rezultatelor evenimentelor decizionale (tabelul 3.1).

Tabelul 3.1

Evenimente finale	Probabilități compuse	Probabilități ale evenimentelor terminale
A și *E*	$p(A)\cdot p(E/A)$ = (0,4) (0,3) (0,7) (1)	= 0,084
B și *Y*	$p(B)\cdot p(Y/B)$ = (0,6) (0,3) (0,7) (1)	= 0,126
C	$p(C)\cdot p(X)\cdot p(Y)$ = (0,3) (0,7) (0,7) (0,6)	= 0,0882
D	$p(D)\cdot p(X)\cdot p(Y)$ = (0,7) (0,7) (0,7) (0,6)	= 0,2058
X și *E*	$p(X)\cdot p(E/X)$ = (0,7) (0,7) (0,4)	= 0,196
G	$p(G)$ = (0,4) (0,5) 0,3)	= 0,06
H	$p(H)$ = (0,6) (0,5) (0,3)	= 0,09
F	$p(F)$ = (0,5) (0,3)	= 0,15

3.6. FUNCȚIA ENTROPIE

Clasamentul evenimentelor terminale posibile în funcție de probabilitățile lor de realizare este un rezultat foarte util. În exemplul dat, evenimentul D are cea mai mare probabilitate și evenimentul (X și E) se plasează al doilea. Evenimentul cel mai puțin probabil este evenimentul G. O utilizare mai bună a acestor probabilități poate fi făcută folosindu-le comparativ, decît încercînd să judecăm un eveniment terminal pe baza probabilității sale absolute, deoarece probabilitățile evenimentelor terminale descresc, în general, în timp ce lungimea grafului și numărul de evenimente decizionale cresc. În legătură cu aceasta, se poate folosi *funcția entropie*, bine cunoscută în fizică sau în teoria informației, care dă o măsură cantitativă a gradului în care anumite evenimente terminale sînt mai favorabile, din punct de vedere probabilistic, decît altele. Această funcție este definită prin relația

$$H = -\sum_{i=1}^{N} p_i \log_2 p_i, \tag{3.5}$$

unde H este entropia, p_i — probabilitatea apriorică a evenimentului terminal de ordinul i și N — numărul evenimentelor terminale.

De exemplu, într-o situație de alegere dichotomică cu probabilități apriorice cu 1/2, H este egală cu 1, dacă se ia logaritmul în baza 2. Dacă probabilitățile sînt 1 și 0, H este egală cu 0. Funcția entropie are o valoare maximală egală cu $\log_2 N$, dacă toate probabilitățile apriorice sînt egale între ele.

Ca măsură a incertitudinii relative într-un sistem, expresia *entropie relativă* a fost definită astfel :

$$E = H / H_{max}. \tag{3.6}$$

Acest concept poate fi utilizat ca o măsură a gradului în care anumite evenimente terminale sînt mai probabile decît altele.

În graful din fig. 3.5 avem :

$$H_{max} = \log_2 8 = 3,$$

$$H = -\sum_{n=1}^{n=8} p_i \log_2 p_i = 2{,}88,$$

$$E = \frac{2,88}{3} = 0,96.$$

3.7. METODA PERT GENERALIZATĂ

Prin introducerea evenimentelor decizionale şi prin afectarea de probabilităţi apriorice rezultatelor fiecăruia dintre aceste evenimente, a putut fi elaborată o generalizare a metodei PERT, utilă în special în programele de cercetări. Probabilităţile apriorice afectate evenimentelor decizionale pot fi obiective sau subiective. În acest ultim caz, ele traduc presupunerile sau intuiţiile specialiştilor consultaţi.

Să reluăm exemplul din fig. 3.5, unde timpii operatori medii sînt daţi de tabelul 3.2. Figura 3.6 dă o reprezentare a grafului, ţinînd

Tabelul 3.2

Operaţia	Timpul operator mediu	Operaţia	Timpul operator mediu
$P_{0,1}$	4	$P_{2,E}$	9
$P_{1,3}$	4	$P_{4,C}$	5
$P_{1,2}$	11	$P_{4,D}$	9
$P_{3,2_1}$	0	$P_{1,5}$	12
$P_{2_1,A}$	6	$P_{5,F}$	3
$P_{2_1,B}$	13	$P_{5,6}$	7
$P_{3,4}$	8	$P_{6,G}$	9
$P_{2,4}$	6	$P_{6,H}$	10

seama de scara timpului. Pot fi obţinute informaţii cum sînt drumul critic, probabilităţile de realizare ale anumitor date ale unui calendar stabilit în prealabil (ponderate prin probabilităţile de a lua anumite drumuri) etc., urmărindu-se preocupările privind fiecare proiect particular. Cunoaşterea probabilităţilor evenimentelor terminale împreună cu cele ale datelor medii de realizare procură indicaţii asupra desfăşurării viitoare a proiectului. Astfel, evenimentul final D este cel mai probabil şi drumurile conducînd la el sînt

$0 - 1 - 3 - 4$ şi $0 - 1 - 2 - 4$.

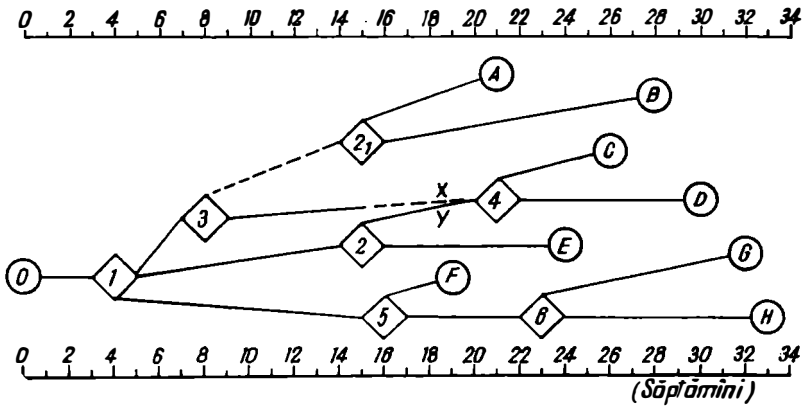


Fig. 3.6

Timpul său de realizare este de 30 săptămîni. De asemenea evenimentul (X şi E) are ca probabilitate de realizare 0,196 şi obiectivul E va fi atins la o dată medie 24. Trebuie observat că, o dată cunoscut rezultatul evenimentului 2 şi dacă el este astfel încît să conducă la E, operaţia $P_{3,4}$ conducînd la X poate fi întreruptă, deoarece pentru atingerea evenimentului 4 este necesar ca ambele operaţii X şi Y să fie efectuate.

Să observăm, în sfîrşit, că evenimentul 2_1 este obligat să se plaseze la aceeaşi dată cu evenimentul 2 sau după el.

Entropia relativă poate fi utilizată ca o măsură, sub forma unui număr unic, după gradul căruia anumite evenimente terminale sînt mai probabile decît altele. O entropie relativă egală cu 1 va sugera că toate evenimentele terminale au aceeaşi probabilitate (sînt echiprobabile), iar o entropie relativă egală cu zero va indica degenerarea grafului într-un graf de tip PERT, unde un eveniment final este absolut sigur de a fi realizat şi toate celelalte nu pot avea loc.

În concluzie, informaţiile, obţinute prin metoda PERT generalizată, permite planificatorului sau organizatorului să compare alternativele unui program pe baza a trei caracteristici: şansele lor relative de realizare, operaţiile care conduc la realizare şi datele lor medii respective. Această metodă se aplică în special programelor de cercetări, dar se aplică la fel de bine şi anumitor programe de dezvoltare.

4

OPTIMIZAREA FUNCȚIEI ECONOMICE A COSTURILOR

4.1. INTRODUCERE

În capitolul 2 au fost obținute diferite informații foarte interesante cu ajutorul metodei PERT. Stabilirea drumului critic sau a drumurilor critice a permis localizarea operațiilor-cheie care comandă desfășurarea unui program și, în particular, data sa medie de realizare. Calculul intervalelor de fluctuație și al marginilor libere operatoare a pus în evidență elasticitatea evenimentelor sau a operațiilor necritice și latitudinea pe care o putem avea în punerea lor în execuție. Aceste aspecte diferite se regăsesc în faza „control al programului în curs de execuție". Atenția planificatorului poate fi atrasă de noi operații critice neprevăzute în programul inițial. El știe atunci în ce direcție trebuie să-și îndrepte efortul, pentru a respecta calendarul impus.

În general, timpii operatori, fie că sînt determinați sau sînt aleatori, variază în funcție de costul operației. Accelerarea unei sarcini se traduce în general printr-o creștere a costului său.

Vrem să luăm acum în considerație acest aspect și obiectul acestui capitol este de a arăta cum este posibil, în anumite condiții, de a optimiza un program.

4.2. UNELE CONSIDERAȚII GENERALE

Fiecare timp operator t_{ij} poate varia între două limite d_{ij} și D_{ij}, impuse de considerații tehnice sau economice. Timpul operator D_{ij} corespunde duratei normale a operației P_{ij} : este durata cores-

punzătoare costului minimal. Timpul operator d_{ij} corespunde, din contră, duratei operației, cînd aceasta este accelerată la maximum, iar prețul corespunzător este maximal.

Notînd cu p_{ij} costul operației P_{ij} pentru o durată t_{ij}, putem admite că $p_{ij} = f(t_{ij})$ este o curbă de un tip analog celei desenate în fig. 4.1. Costul crește dacă t_{ij} descrește pînă în d_{ij}, dincolo de care nu se mai poate efectua lucrul.

Pare destul de verosimil ca întîi costul să treacă printr-un minim foarte plat, apoi să crească pentru condiții anormale de lucru corespunzătoare la mijloace insuficiente, în ceea ce privește mîna de lucru sau materialul.

Dacă se ia ca timp operator al fiecărei operații a programului durata normală D_{ij}, durata de execuție totală a programului va fi durata normală : programul stabilit va fi un program *normal*. Din contră, dacă se accelerează la maximum fiecare operație și dacă pentru fiecare dintre ele se ia ca timp operator d_{ij}, programul obținut va fi programul numit *accelerat* al ansamblului de lucrări de realizat.

Trebuie să observăm că ne aflăm aici în situația în care timpii operatori au valori determinate și nealeatoare ; altfel spus, pentru un cost dat, durata unei operații este bine determină și aceasta, pentru fiecare operație, se poate determina printr-o curbă de tipul celei din fig. 4.1.

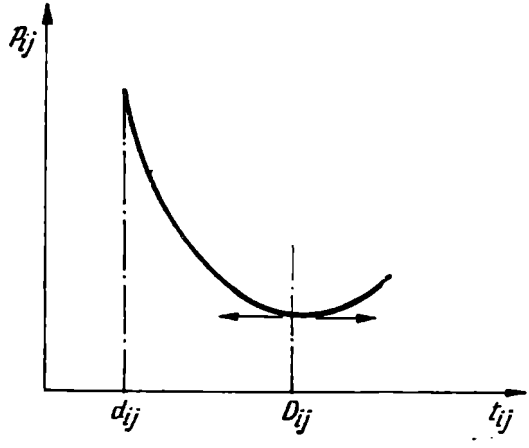


Fig. 4.1

Vom pune acum în evidență două aspecte interesante de optimizare a unui program, pornind de la informațiile date de metoda drumului critic.

4.3. DIMINUAREA COSTULUI TOTAL AL UNUI PROGRAM

În acest paragraf nu este vorba de căutarea optimului unui program, ci numai de a arăta cum permit informațiile date de metoda PERT să i se diminueze costul total, acționînd asupra operațiilor necritice.

Să considerăm deci, pentru un ansamblu de lucrări, un program oarecare, unde timpii operatori au fost totuși aleși astfel încît

$$d_{ij} < t_{ij} < D_{ij}. \tag{4.1}$$

Calculul drumului critic dă durata de execuție a programului. Costul total al programului astfel stabilit este suma costurilor tuturor operațiilor:

$$p = \sum_{(i,j)\in \mathbf{U}} p_{ij}, \tag{4.2}$$

unde $p_{ij} = 0$ dacă $(i, j) \notin \mathbf{U}$ ($\mathbf{U}$ reprezentînd mulțimea arcelor care constituie graful programului).

Pentru a diminua costul total al programului, *durata de execuție rămînînd aceeași*, vor trebui micșorate marginile libere ale operațiilor necritice în limitele impuse de restricțiile 4.1. Într-adevăr, a diminua marginea liberă a unei operații înseamnă a mări timpul său operator, deci a diminua costul. Făcînd aceasta s-ar putea întîmpla să se creeze noi drumuri critice. Acesta va fi cazul cînd s-ar putea anula toate marginile libere ale operațiilor care constituie un drum pornind de la E_1 la E_n.

Vom preciza toate acestea reluînd exemplul din 2.3. Timpii operatori t_{ij} sînt acum susceptibili să varieze între D_{ij} și d_{ij}, mijlocind o creștere a costului fiecărei sarcini. Valorile timpilor D_{ij} și d_{ij} sînt date în tabelul 4.1. Vom presupune că *creșterea costurilor este proporțională cu scăderea timpilor operatori*. Aceasta duce la presupunerea că se reduc curbele de tipul celei din fig. 4.1, pentru fiecare operație, la segmente de dreaptă. Coeficienții de proporționalitate c_{ij} sînt dați în tabelul 4.1; acestea sînt costurile marginale ale fie-

Tabelul 4.1

P_{ij}	d_{ij}	D_{ij}	t_{ij}	Marginea liberă	v_{ij} (în F)	c_{ij}
$P_{1,2}$	7	10	8	0	6 000	100
$P_{1,3}$	12	15	13	0	20 000	1 200
$P_{1,4}$	7	10	9	11	2 000	200
$P_{2,3}$	3	6	4	1	8 000	300
$P_{2,5}$	8	13	9	0	1 000	600
$P_{2,6}$	5	7	6	9	4 000	150
$P_{3,4}$	7	9	7	0	3 000	200
$P_{3,6}$	9	12	10	0	2 000	100
$P_{3,8}$	5	8	6	10	4 000	200
$P_{3,9}$	9	10	9	11	25 000	150
$P_{4,7}$	8	11	10	7	8 000	250
$P_{4,8}$	7	12	9	0	3 000↑	600
$P_{4,11}$	6	8	6	16	4 000	150
$P_{5,9}$	3	4	3	13	10 000	450
$P_{6,7}$	4	7	5	9	2 000	150
$P_{6,8}$	2	7	3	3	3 000	300
$P_{6,9}$	7	8	8	2	12 000	800
$P_{7,11}$	3	6	4	1	3 000	150
$P_{8,7}$	6	9	8	0	10 000	200
$P_{8,9}$	4	5	4	0	8 000	400
$P_{8,10}$	4	6	5	14	2 000	300
$P_{8,11}$	11	15	13	0	7 000	1 000
$P_{9,10}$	4	6	5	10	3 000	400
$P_{10,12}$	10	14	13	0	6 000	900
$P_{11,10}$	5	8	6	0	2 000	300
$P_{11,12}$	15	18	17	2	2 000	500

cărei operații. De asemenea, am făcut să figureze timpii operatori t_{ij} corespunzători programului neameliorat, marginile libere și costurile p_{ij} ale fiecărei operații. Programul original este cel din fig. 4.2. Numerele dintre paranteze reprezintă marginile libere ale operațiilor.

Durata de realizare a unui astfel de proiect este de 61 săptămîni și costul său total, obținut din suma costurilor operatorii așezate în coloana 6 a tabelului 4.1. este de 160 000 F.

Ameliorare imediată care se impune mai întîi este mărirea timpilor operatori ai operațiilor necritice și aceasta, ținîndu-se cont pentru fiecare operație, de valoarea D_{ij} și de marginea liberă corespunzătoare.

Astfel marginea liberă a lui $P_{1,2}$ fiind 0, timpul său operator nu se poate prelungi. La fel pentru $P_{1,3}$. Din contră, marginea liberă a lui $P_{1,4}$ fiind 11, durata sa se poate lungi, ea va deveni 10 săptămîni. $P_{2,3}$ are o margine liberă 1 și $D_{2\,3} = 6$, durata lui $P_{2,3}$ va putea fi lungită și va fi de 5 săptămîni. $P_{2,5}$ avînd o margine liberă nulă, nu poate fi lungită. $P_{2,6}$ avînd o margine liberă 9 și $D_{2,6}$ fiind egală cu 7, durata sa va putea fi lungită și va fi de 7 săptămîni etc.

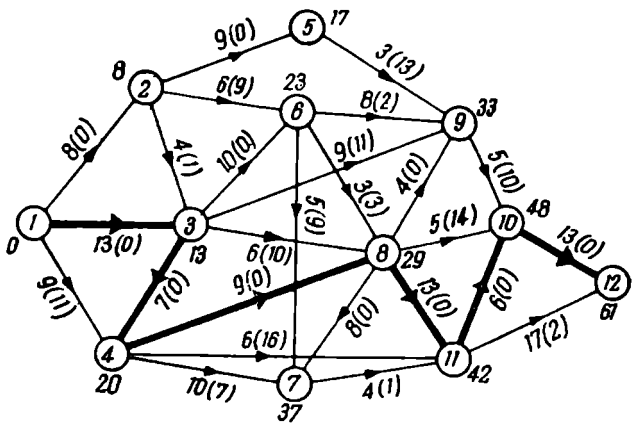


Fig. 4.2

Noii timpi operatori ai operațiilor necritice vor fi

$t'_{1,2} = 8$ $t'_{4,7} = 11$ $t'_{8,10} = 6$
$t'_{1,3} = 13$ $t'_{4,8} = 9$ $t'_{8,11} = 13$
$t'_{1,4} = 10$ $t'_{4,11} = 8$ $t'_{9,10} = 6$
$t'_{2,3} = 5$ $t'_{5,9} = 4$ $t'_{10,12} = 13$
$t'_{2,5} = 9$ $t'_{6,7} = 7$ $t'_{11,10} = 6$
$t'_{2,6} = 7$ $t'_{6,8} = 6$ $t'_{11,12} = 18$
$t'_{3,4} = 7$ $t'_{6,9} = 8$
$t'_{3,6} = 10$ $t'_{7,11} = 5$
$t'_{3,8} = 8$ $t'_{8,7} = 8$
$t'_{3,9} = 10$ $t'_{8,9} = 4$

Aceşti noi timpi operatori sînt subliniaţi.

Graful noului program va fi cel din fig. 4.3. Anumite margini libere sînt anulate şi au apărut astfel noi drumuri critice. Drumurile critice sînt :

[1, 2, 3, 6, 8, 11, 10, 12|
[1, 3, 6, 8, 11, 10, 12]
[1, 2, 3, 4, 8, 11, 10, 12]
[1, 3, 4, 8, 11, 10, 12]
[1, 2, 3, 6, 8, 7, 11, 10, 12]
[1, 3, 6, 8, 7, 11, 10, 12|
[1, 2, 3, 4, 8, 7, 11, 10, 12]
[1, 3, 4, 8, 7, 11, 10, 12].

Noile margini din fig. 4.3. sînt puse în paranteze.

Economia asupra fiecărei operaţii s-a obţinut făcîndu-se produsul lui c_{ij} cu creşterea duratei operatorii. Economia realizată asupra lui $P_{1,4}$ este egală cu 200 ; asupra lui $P_{2,3}$ este 300 ; asupra lui $P_{2,6}$ este 150 ; asupra lu i $P_{3,8}$ este $200 \times 2 = 400$; asupra lui $P_{3,}$ este 150 ; asupra lui $P_{4,7}$ este 250 ; asupra lui $P_{4,11}$ este $150 \times 2 = 300$; asupra lui $P_{5,9}$ este 400 ; asupra lui $P_{6,7}$ este $150 \times 2 = 300$; asupra lui $P_{6,8}$ este egală cu $300 \times 3 = 900$; asupra lui $P_{7,11}$ este 150 ; asupra lui $P_{8,10}$ este 300 ; asupra lui $P_{9,10}$ este 400 ; asupra lui $P_{11,12}$ este 500.

Economia totală este suma economiilor realizate asupra fiecărei operații, adică 4700 F și costul total al noului program din fig. 4.3 este

$$160\,000 - 4700 = 155\,300 \text{ F.}$$

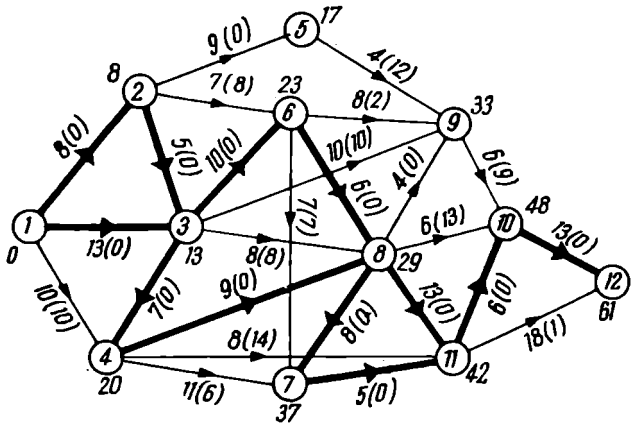


Fig. 4.3

Nu trebuie însă să credem că s-a atins optimul pentru o durată de realizare de 61 săptămîni. Considerațiile precedente au căutat să arate pur și simplu cum informațiile date de metoda PERT permit ameliorarea unui program, prelungind operațiile necritice atît cît este posibil.

4.4. ACCELERAREA UNUI PROGRAM LA CEL MAI MIC COST*)

Pentru a diminua timpul de execuție total al unui program, trebuie diminuată durata unei operații critice. Durata de execuție totală va fi de asemenea redusă. Dacă alegem operația critică care *pentru o aceeași diminuare a timpului* propune *cea mai mică creștere*

*) Exemplul datorat lui F. Ochoa, inginer civil (Univ. din Mexico).

a costului, vom accelera programul cu cele mai mici cheltuieli. Şi aici, metoda folosită va fi intuitivă şi destul de banală. Obiectul acestui paragraf este, ca şi al paragrafului 4.3, să arate importanţa economică a rezultatelor metodei PERT: drum critic şi margini libere.

Să presupunem, de exemplu, că avem de construit şi echipat un ansamblu hidroelectric. Să luăm ca unitate de timp luna.

Operaţiile de realizat sînt:

a) construcţia drumurilor de acces la uzină şi la carierele de exploatat pentru obţinerea materialelor (durata probabilă $t_a = 4$);

b) pregătirea carierelor de exploatare şi a fundaţiilor ($t_b = 6$);

c) construcţia unui centru pentru administraţie şi personal, în general ($t_c = 4$);

d) comanda materialului electric şi hidraulic (generatoare, turbine, conductă forţată etc.) ($t_d = 12$);

e) construcţia uzinei ($t_e = 10$);

f) construcţia barajului, a digurilor şi a deversorului de suprafaţă ($t_f = 24$);

g) construcţia galeriilor şi conductelor de aducţiune ($t_g = 7$);

h) montajul uzinei şi al conductelor ($t_h = 10$);

i) încercarea funcţionării ($t_i = 3$).

Graful acestui program este cel din fig. 4.4. Evenimentele sau etapele sînt:

1) pornirea lucrărilor;
2) terminarea drumurilor de acces;
3) terminafrea centrului şi a fundaţiilor;
4) terminarea uzinei şi a conductelor de aducţiune;
5) terminarea ansamblului energetic;
6) livrarea lucrărilor.

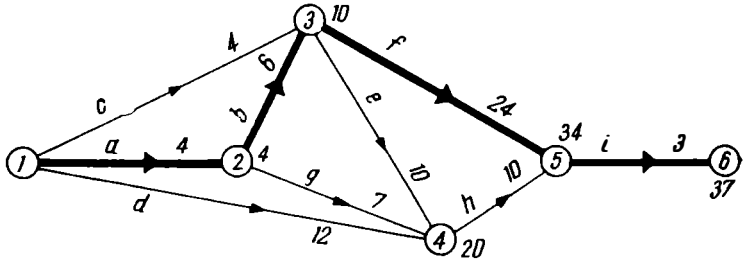


Fig. 4.4

Am presupus că programul inițial normal stabilit se ridică la 350 milioane F repartizați după cum se indică în tabelul 4.2. Pe acest tabel sînt indicate de asemenea duratele și costurile corespunzătoare programului accelerat, unde toate operațiile sînt reduse la minimul compatibil cu cerințele tehnice.

Tabelul 4.2

Sarcina	Program normal		Program accelerat		Costul accelerării pe lună
	Durata probabilă (luni)	Cost probabil (milioane F)	Durata probabilă	Cost probabil	
a	4	5	2	15	5
b	6	11	5	30	19
c	4	3	2	11	4
d	12	150	9	180	10
e	10	10	8	20	5
f	24	147	19	212	13
g	7	18	6	30	12
h	10	4	7	25	7
i	3	2	2	5	3
		350		528	

Dacă vrem să reducem durata totală a execuției la 9 luni, trebuie să atacăm mai întîi sarcinile critice, adică sarcinile *a*, *b*, *f* și *i*.

În mod precis, reducerea cu o lună a lui *i* va fi mai puțin scumpă (3 milioane), deoarece reducerea sarcinilor *a*, *b* și *f* costă 5, 19 și respectiv 13 milioane F. Deci, vom urma această cale (fig. 4.5). Nu este necesar să accelerăm sarcinile necritice; s-ar cheltui bani în

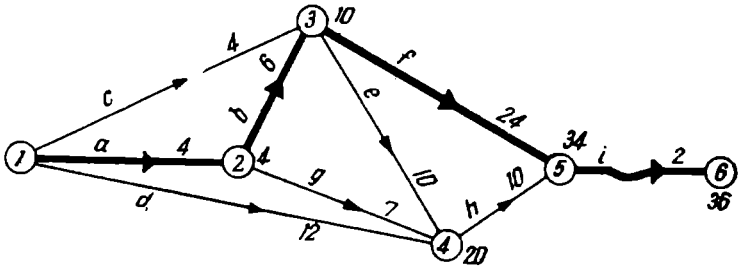


Fig. 4.5

pierdere ; autorii americani o numesc eroare de alegere „To buy floating time". *)

Să mergem mai departe şi să încercăm să cîştigăm o lună în plus. În acest caz, reducerea cu o lună a lui a ne va da costul cel mai mic, deoarece după cum se vede în tabelul 4.2, nu se poate continua cu reducerea lui i.

Se va continua în acelaşi mod accelerînd sarcina a, apoi sarcina f după cum se poate vedea în tabelul 4.3. Reducerea sarcinii f de la 21 la 20 luni va face să apară două noi sarcini critice, anume : e să fie $P_{3,4}$ şi h să fie $P_{4,5}$ (fig. 4.6). În sfîrşit, dacă vrem să cîş-

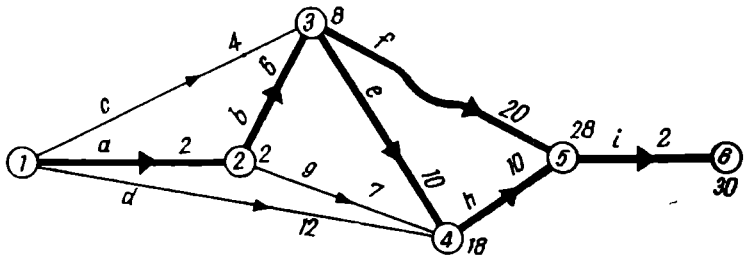


Fig. 4.6

tigăm încă o lună, adică să reducem durata totală de la 30 la 29 luni, putem realiza aceasta prin una din următoarele căi :

a cîştiga	1 lună asupra lui f: cost	13
	1 lună asupra lui e: cost	5
	Total :	18
a cîştiga	1 lună asupra lui b: cost	19
	Total :	19

Se vede că este avantajos să cîştigăm timp asupra lui f şi e. Trebuie deci 18 milioane în plus faţă de situaţia de mai înainte pentru a cîştiga încă o lună.

În definitiv, alegerea va putea fi exercitată asupra programelor următoare (vezi tabelul 4.3).

*) A cumpăra timp pierdut (N.T.).

Tabelul 4.3

Durata programului	Costul (milioane F)	Durata operațiilor (luni)								
		a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*	*i*
37 luni	350	4	6	4	12	10	24	7	10	3
36 —	353	4	6	4	12	10	24	7	10	2
35 —	358	3	6	4	12	10	24	7	10	2
34 —	363	2	6	4	12	10	24	7	10	2
33 —	376	2	6	4	12	10	23	7	10	2
32 —	389	2	6	4	12	10	22	7	10	2
31 —	402	2	6	4	12	10	21	7	10	2
30 —	415	2	6	4	12	10	20	7	10	2
29 —	433	2	6	4	12	9	19	7	10	2
28 —	452	2	5	4	12	9	19	7	10	2

4.5. VARIAȚIA ARBITRARĂ A COSTULUI OPERATOR ÎN FUNCȚIE DE DURATĂ

Este cazul foarte general cînd fiecărei operații i se poate asocia o curbă de cost în funcție de durată, de tipul celei din fig. 4.1 Fiecare timp operator variază între două limite : *durata normală* D_{ij} corespunzătoare costului minim și *durata accelerată* d_{ij}.

Dacă într-un program se ia pentru fiecare operație durata sa normală, corespunzătoare costului minimal D_{ij}, se obține un program normal al cărui cost total este el însuși minimal. Durata sa este D_n dacă n este indicele evenimentului final E_n .

Dacă se ia pentru fiecare operație durata sa accelerată d_{ij}, se obține un program accelerat. Acesta nu este în general un program optimal, adică cu cost minimal, căci i se poate reduce costul prelungind operațiile necritice, cum s-a indicat în 4.3. Din contră, durata sa de execuție este minimală. O vom numi d_n dacă E_n este evenimentul final.

Pentru valorile situate între d_n și D_n există o infinitate de soluții posibile. Dacă reprezentăm variația costului total p în funcție de durata de execuție totală a ansamblului lucrărilor, obținem o figură $OABC$ care include toate soluțiile posibile, OA fiind locul soluțiilor optimale (fig. 4.7). În cazul general, cînd curbele : costul în funcție de durată sînt oarecare, metodele de cercetare operațională, în

stadiul cunoștințelor actuale, nu par să fie capabile să determine curba OA, locul soluțiilor optimale.

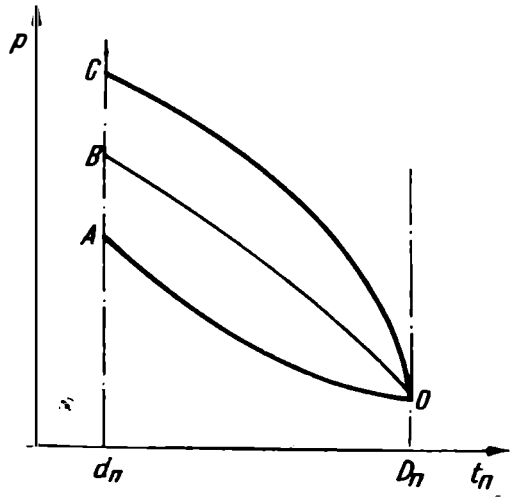


Fig 4.7

Totuși, metoda indicată în 4.3 permite determinarea punctului A. Pornind de la un program unde toți timpii operatori sînt d_{ij}, putem reduce costul acestui program, micșorînd marginile libere ale operațiilor necritice, în limitele permise. Pe fig. 4.7 putem traduce aceasta spunînd că evoluăm pe verticala ABC a lui d_n. Plecînd din punctul C, atingem A reducînd la maximum marginile libere ale operațiilor necritice.

Plecînd de la programul corespunzător punctului O (timpi operatori D_{ij}), putem diminua durata totală de execuție reducînd arbitrar una sau mai multe operații critice și continuînd astfel din aproape în aproape, observînd că, în general, se creează noi drumuri critice. Evoluăm atunci pe figura OAB, care reprezintă mulțimea soluțiilor posibile, nescurtînd decît lucrările drumurilor critice. Această abordare a problemei poate fi interesantă dacă figura OAB este suficient de aplatizată. Poate fi construit un algoritm pentru a face metoda mecanizabilă.

Dacă acum, la fiecare etapă alegem operația sau operațiile critice, care dau pentru o aceeași micșorare de timp cea mai mică creștere a costului, cum am făcut în 4.4, atunci evoluăm pe curba OA, locul soluțiilor optimale. Din nefericire se înțelege că o astfel de metodă este inaplicabilă în cazul general cînd curbele cost-durată sînt oarecare și cînd programul cuprinde mai multe sute de operații. Ea nu se aplică ușor decît atunci cînd graful este foarte simplu (de ordinul a zece operații) sau atunci cînd, pentru fiecare operație, curbele $p_{ij} = f(t_{ij})$ au forme particulare (parabole, drepte, curbe convexe formate din segmente de dreaptă). Aceste cazuri particulare formează obiectul paragrafelor următoare.

4.6. VARIAȚIA LINIARĂ A COSTULUI ÎN FUNCȚIE DE DURATĂ. PROGRAM LINIAR PARAMETRIC

Se presupune că pentru fiecare operație P_{ij} curba costului în funcție de durată, fie $p_{ij} = f(t_{ij})$, este o dreaptă (fig. 4.8), adică:

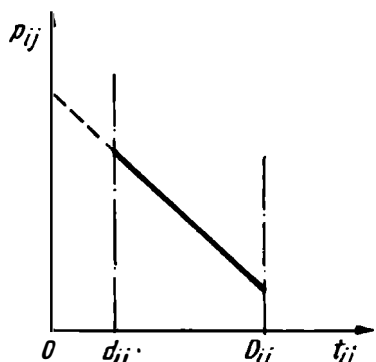


Fig. 4.8

$$p_{ij} = k_{ij} - c_{ij}\, t_{ij} \qquad (4.3)$$

cu

$$d_{ij} \leqslant t_{ij} \leqslant D_{ij}\,. \qquad (4.4)$$

Să considerăm un anumit program, a cărui durată de execuție este t_n, E_n fiind evenimentul final. Ne propunem să minimizăm costul total al acestui program. Aceasta se traduce prin programul liniar

$$\begin{cases} d_{ij} \leqslant t_{ij} \leqslant D_{ij}, \\ \sum\limits_{(i,j)\in\mu} t_{ij} \leqslant t_n, \text{ pentru orice } \mu \in \mu_n, \\ [\text{MIN}] \sum\limits_{(i,j)\in U} (k_{ij} - c_{ij}\, t_{ij}), \end{cases} \qquad (4.5)$$

unde μ_n este mulțimea drumurilor mergînd de la vîrful 1 la vîrful n; U — mulțimea arcelor care constituie graful programului. Fă-

cînd să varieze durata totală de execuție a programului t_n și înlocuind MIN prin MAX, obținem programul liniar parametric, unde $t_n = \lambda$ este parametrul care variază:

$$\begin{cases} d_{ij} \leqslant t_{ij} \leqslant D_{ij}\,, \\ \sum\limits_{(i,j)=\mu} t_{ij} \leqslant \lambda, \text{ pentru orice } \mu \in \mu_n\,, \\ [\mathrm{MAX}] \sum\limits_{(i,j)\in U} c_{ij}\, t_{ij}\,. \end{cases} \tag{4.6}$$

În cazul particular studiat, curba OA din fig. 4.7 este o curbă convexă formată din segmente de dreaptă. Metoda de rezolvare clasică a programelor liniare parametrice ne permite să obținem vîrfurile acestei curbe (fig. 4.9).

Cunoscînd curba OA, locul soluțiilor optimale, planificatorul poate alege programul care răspunde cel mai bine preocupărilor sale, îndreptîndu-și atenția fie asupra duratei totale de execuție a ansamblului lucrărilor, fie asupra costului său total.

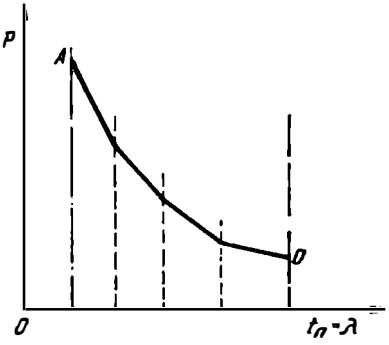


Fig. 4.9

Să observăm că metoda folosită în rezolvarea unui program liniar parametric se bazează chiar pe ideile enunțate pe scurt în 4.5. De fapt, pentru problemele care ne interesează și anume optimizarea unui program, au fost elaborați mai mulți algoritmi, care țin scama de structura foarte particulară a programului liniar parametric (4.6). Aceștia sînt algoritmul lui Kelley [21 și 22] și algoritmul lui Fulkerson [23]. Acești doi algoritmi sînt sensibil echivalenți și ambii au ca punct de plecare dualul programului (4.6).

În paragrafele următoare vom expune complet algoritmul lui Fulkerson.

4.7. ALGORITMUL LUI FULKERSON

4.7.1. ASPECTUL MATEMATIC AL ALGORITMULUI

Notînd mereu cu t_i data de realizare a evenimentului E_i, programul (4.6) se poate scrie sub forma :

$$t_{ij} + t_i - t_j \leqslant 0 \text{ pentru orice } (i, j) \in \mathbf{U}, \tag{4.7}$$

$$- t_1 + t_n \leqslant \lambda, \tag{4.8}$$

$$t_{ij} \leqslant D_{ij} \text{ pentru orice } (i, j) \in \mathbf{U}, \tag{4.9}$$

$$- t_{ij} \leqslant - d_{ij} \text{ pentru orice } (i,j) \in \mathbf{U}, \tag{4.10}$$

$$[\mathrm{MAX}] \sum_{(i,j)\in \mathbf{U}} c_{ij}\, t_{ij}\,. \tag{4.11}$$

Costul total al ansamblului lucrărilor $p\ (\lambda)$ este

$$p(\lambda) = \sum_{(i,j)\in \mathbf{U}} k_{ij} - \max \sum_{(i,j)\in \mathbf{U}} c_{ij}\, t_{ij}\,. \tag{4.12}$$

Vom presupune că vîrfurile sînt numerotate respectînd ordinea nivelelor unde sînt plasate (vezi 1.4). Curba $p\ (\lambda)$ este curba OA din fig. 4.7, locul soluțiilor optimale. Ecuația (4.7) exprimă că trebuie să existe suficient timp între datele evenimentelor E_i și E_j pentru a efectua operația P_{ij} în t_{ij} unități de timp și (4.8) exprimă faptul că durata totală a proiectului este cel mult egală cu λ.

Să examinăm dualul programului (4.7) — (4.11). Dacă atribuim variabile de abatere nenegative f_{ij}, v, g_{ij}, h_{ij} restricțiilor (4.7), (4.8), (4.9) respectiv, dualul programului, pentru λ fixat și $t_1 = 0$, se scrie astfel :

$$f_{ij} + g_{ij} - h_{ij} = c_{ij} \text{ pentru orice } (i, j) \in \mathbf{U}, \tag{4.13}$$

$$\sum_{(i,j)\in \mathbf{U}_i^+} f_{ij} - \sum_{(j,i)\in \mathbf{U}_i^-} f_{ji} = \begin{cases} 0 \text{ pentru } i \neq 1 \text{ și } i \neq n, \\ -\,v \text{ pentru } i = n \\ +\,v \text{ pentru } i = 1 \end{cases} \tag{4.14}$$

$$[\,\mathrm{MIN}\,] \left(\lambda\, v + \sum_{(i,j)\in \mathbf{U}} D_{ij}\, g_{ij} - \sum_{(i,j)\in \mathbf{U}} d_{ij}\, h_{ij} \right), \tag{4.15}$$

unde U_i^+ este submulțimea arcelor grafului incidente în vîrful i către exterior și $\mathbf{U}_i^-$ este submulțimea arcelor grafului incidente în

vîrful i către interior (fig. 4.10). Cel puţin una din cantităţile g_{ij}, h_{ij} poate fi luată egală cu 0 în soluţia optimală a programului dual şi putem presupune :

$$g_{ij} = \max\ [0,\ c_{ij} - f_{ij}], \qquad (4.16)$$

$$h_{ij} = \max\ [0, f_{ij} - c_{ij}]. \qquad (4.17)$$

Astfel problema duală poate să fie enunţată după cum urmează : să se găsească numerele nenegative f_{ij}, cîte unul pentru fiecare arc al grafului, şi un număr nenegativ v, care să satisfacă ecuaţiile (4.14) şi să minimalizeze forma liniară

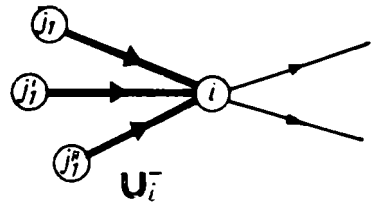


Fig. 4.10

$$\lambda v + \sum_{(i,j)\in U} D_{ij} \max\ [0, c_{ij} - f_{ij}] - \sum_{(i,j)\in U} d_{ij} \max\ [0, f_{ij} - c_{ij}]. \qquad (4.18)$$

Să transformăm variabilele f_{ij} în modul următor. Se înlocuieşte fiecare f_{ij} printr-o sumă de două variabile nenegative :

$$f_{ij} = f_{i,j;1} + f_{i,j;2}\ , \qquad (4.19)$$

noile variabile fiind supuse la restricţiile :

$$f_{i,j;1} \leqslant c_{i,j}\ , \qquad (4.20)$$

$$f_{i,j;2} < \infty\ . \qquad (4.21)$$

Atunci $f_{i,j;1}$ are drept coeficient pe $-D_{i,j}$ şi $f_{i,j;2}$ are drept coeficient pe $-d_{ij}$ în noua formă liniară de minimizat :

$$\lambda v + \sum_{(i,j)\in U} D_{ij}\, c_{ij} - \sum_{(i,j)\in U} D_{ij}\, f_{i,j;1} - \sum_{(i,j)\in U} d_{ij}\, f_{i,j;2}\ .$$

Dacă punem

$$c_{i,j;k} = \begin{cases} c_{ij} & k = 1, \\ \infty & k = 2\ ; \end{cases} \qquad (4.22)$$

$$d_{i,j;k} = \begin{cases} D_{ij} & k = 1, \\ d_{i,j} & k = 2\ ; \end{cases} \qquad (4.23)$$

programul dual se scrie neglijînd termenul constant :

$$\sum_k \sum_{(i,j)\in \mathbf{U}_i^+} f_{i,j;k} - \sum_k \sum_{(i,j)\in \mathbf{U}_i^-} f_{j,i;k} = \begin{cases} 0 & i \neq 1,\ i \neq n, \\ -v & i = n, \\ +v & i = 1, \end{cases} \tag{4.24}$$

$$0 \leqslant f_{i,j;k} \leqslant c_{i,j;k}, \tag{4.25}$$

$$[\mathrm{MIN}] \left(\lambda v - \sum_k \sum_{(i,j)\in \mathbf{U}} d_{i,j;k}\, f_{i,j;k} \right). \tag{4.26}$$

Acest program este acela al unei probleme de flux într-o rețea dedusă din graful proiectului dedublînd toate arcele (fig. 4.11) *). Fiecare arc $(i,j;k)$ al noului graf are o capacitate maximală $c_{i,j;k}$ și îi este afectat un cost $d_{i,j;k}$. Sîntem astfel conduși la o problemă de flux maximal, unde funcția economică de considerat este expresia (4.26). Astfel de probleme fac de cîțiva ani obiectul a numeroase studii, și sînt cunoscute pentru aceste cazuri particulare metode de calcul superioare metodelor generale ale programării liniare parametrice.

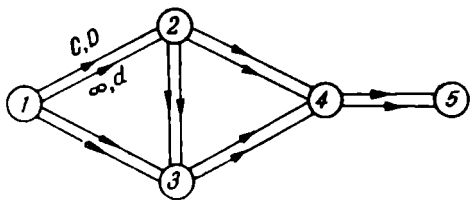


Fig. 4.11

Timpii operatori optimali $t_{i,j}$ ai proiectului, corespunzători datelor t_i produse în cursul procedeului, sînt dați simplu de :

$$t_{i,j} = \min\ [D_{i,j},\ t_j - t_i]. \tag{4.27}$$

*) Acest nou graf poate fi considerat ca suprapunerea a două grafuri diferite prin valorile restricțiilor și costurilor afectate arcelor. Se poate observa că notația folosită în formulele (4.24) — (4.26) nu este în întregime riguroasă, pentru că mulțimea $\mathbf{U}$ este dedublată în două submulțimi $\mathbf{U}_1$ și $\mathbf{U}_2$. Riguros ar trebui scris pentru (4.26)

$$[\mathrm{MIN}] \left((\lambda v - \sum_{k=1}^{2} \sum_{(i,j)\in \mathbf{U}_k} d_{i,j;k}\ f_{i,j;k} \right).$$

4.7.2. ASPECTUL TEORETIC AL ALGORITMULUI

Procesul de bază utilizat în algoritmul lui Fulkerson este un proces de marcare a anumitor vîrfuri ale grafului. În general, acest proces este căutarea sistematică a unui lanț, avînd anumite proprietăți, de la vîrful 1 la n. Cuvîntul *lanț* prin opoziție cu cuvîntul *drum* înseamnă că anumite arce pot fi traversate în sens invers orientării lor proprii. Altfel spus, un lanț este un șir de arce de o orientare oarecare *).

Procesul de marcare se începe cu un flux $f_{i,j;k}$ și cu datele t_i care satisfac condițiile :

$$t_1 = 0, \tag{4.28}$$

$$d_{i,j;k} + t_i - t_j < 0 \Rightarrow f_{i,j;k} = 0, \tag{4.29}$$

$$d_{i,j;k} + t_i - t_j > 0 \Rightarrow f_{i,j;k} = c_{i,j;k}. \tag{4.30}$$

Pentru a simplifica notațiile, să punem

$$\overline{d}_{ij;k} = d_{i,j;k} + t_i - t_j .$$

Pentru $\lambda = t_n$ aceste proprietăți înseamnă că fluxul f minimizează (4.26). Aceasta se deduce din teorema asupra dualității unui program liniar sau se poate vedea direct, observînd că :

$$\sum_k \sum_{(i,j)\in U} \overline{d}_{i,j;k} f_{i,j;k} = \sum_k \sum_{(i,j)\in U} d_{i,j;k} f_{i,j;k} + \sum_k \sum_{(i,j)\in U} [t_i - t_j] f_{i,j;k} =$$

$$= \sum_k \sum_{(i,j)\in U} d_{i,j;k} f_{i,j;k} + [t_1 - t_n] v. \tag{4.31}$$

$$\sum_k \sum_{(i,j)\in U} \overline{d}_{i,j;k} f_{i,j;k} = \sum_k \sum_{(i,j)\in U} d_{i,j;k} f_{i,j;k} - \lambda v$$

relațiile (4.29) și (4.30) înseamnă că f maximizează partea stîngă a lui (4.31), deci maximizează și pe cea din dreapta, ceea ce revine la a minimiza (4.26).

Procesul de afișaj se termină, fie cînd vîrful n poate fi marcat, fie cînd nici un marcaj nu mai poate fi atribuit și vîrful n nu este atins.

---

*) Pentru o mai mare precizie referitoare la terminologia teoriei grafurilor, cititorul va putea să se oprească la referințele [1] sau [3].

A marca vîrful n înseamnă că s-a găsit un lanț de la 1 la n astfel încît arcelor orientate în sensul de la 1 la n le corespund $\bar{d}_{i,j;k} = 0$ și $f_{i,j;k} < c_{i,j;k}$, în timp ce arcelor orientate în sens contrar le corespund $\bar{d}_{i,j;k} = 0$ și $f_{i,j;k} > 0$. Atunci fluxul se schimbă adăugînd ε arcelor orientate de la 1 la n și scăzînd ε pentru celelalte. Se obține un nou flux f' pentru care proprietățile optimale (4.28) — (4.30) sînt întotdeauna verificate.

În cazul în care vîrful n nu a putut fi marcat, datele evenimentelor se schimbă scăzînd δ din datele evenimentelor corespunzătoare vîrfurilor nemarcate. Aceasta nu-l schimbă pe $t_1 = 0$, dar reduce pe $t_n = \lambda$ și definește o nouă mulțime de timpi operatori prin formula (4.27). Cantitatea δ este aleasă astfel încît noile date t'_i și vechiul flux f să satisfacă în continuare proprietățile optimale (4.28) — (4.30).

Procesul de afișaj descris mai înainte a fost divizat în două părți. În prima parte se caută un drum de la vîrful 1 la vîrful n compus din arce de capacitate infinită (cele corespunzătoare lui $k = 2$), astfel încît $\bar{d}_{i,j;k} = 0$. Existența unui astfel de drum marchează sfîrșitul calculului, căci aceasta înseamnă că o nouă scădere a lui λ ar face programul nerealizabil, timpii operatori ai acestui drum fiind reduși la maximum. Dacă nu există un astfel de drum, se trece la a doua parte a procesului de afișaj așa cum este descrisă mai înainte.

Procesul iterativ este început printr-un flux nul și prin datele t_i satisfăcînd proprietățile optimale (4.28) — (4.30). Datele sînt acelea din program corespunzînd punctului 0 din fig. 4.7, punct în care timpii operatori sînt D_{ij}.

4.8. DETALII ALE PROCEDEULUI ITERATIV UTILIZAT ÎN ALGORITMUL LUI FULKERSON

PORNIRE Se calculează $t_1, t_2, \ldots, t_n$ prin iterație

$$t_1 = 0 \tag{4.32}$$

$$t_j = \max_i [t_i + \bar{d}_{i,j;1}] = \max_i [t_i + D_{i,j}].$$

Se ia

$$f_{i,j;k} = 0. \tag{4.33}$$

FAZA A | Procesul de afişaj

Prima parte

Se atribuie vîrfului 1 marcajul $[-, -, -, \varepsilon(1) = \infty]$. În cazul general, se ia un vîrf notat i şi se caută un alt vîrf j astfel încît $(i, j; 2)$ să fie un arc al grafului şi

$$\bar{d}_{i,j;2} = 0 . \tag{4.34}$$

Se marchează atunci vîrful j cu $[i, 2, +, \varepsilon_j = \infty]$.

Se repetă această operaţie de marcare din aproape în aproape pînă cînd vîrful n ajunge că fie marcat sau nu. În primul caz, calculul este terminat. În al doilea caz, se trece la partea a doua.

Partea a doua

Vîrfurile marcate mai înainte îşi păstrează marcajul şi procesul de afişaj continuă după cum urmează. Se ia un vîrf i care este marcat şi se caută un vîrf j nemarcat astfel încît $(i,j; k)$ să fie un arc al grafului cu

$$\bar{d}_{i,j;k} = 0, \quad f_{i,j;k} < c_{i,j;k} \tag{4.35}$$

sau $(j, i; k)$ să fie un arc al grafului, cu

$$\bar{d}_{j,i;k} = 0, \quad f_{j,i;k} > 0. \tag{4.36}$$

În primul caz [relaţiile (4.35)], vîrful j primeşte marcajul $[i, k, +, \varepsilon_j]$, unde

$$\varepsilon_j = \min [\varepsilon_i, (c_{i,j;k} - f_{i,j;k})]. \tag{4.37}$$

În al doilea caz [relaţiile (4.36)], vîrful j primeşte marcajul $[i, k, -, \varepsilon_j]$,

$$\varepsilon_j = \min [\varepsilon_i, f_{j,i;k}]. \tag{4.38}$$

Se repetă această operaţie de marcare din aproape în aproape. Dacă vîrful n a putut fi marcat prin acest procedeu, se trece la faza B ; dacă nu, se trece la faza C.

Eventualităţile (4.35) şi (4.36) sînt reprezentate, respectiv, pe figurile 4.12 şi 4.13.

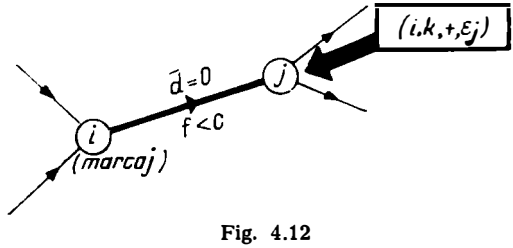


Fig. 4.12

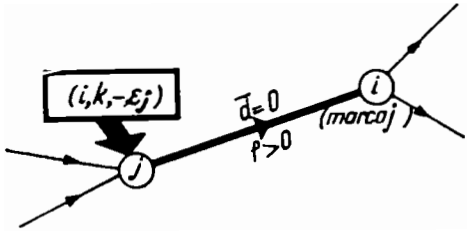


Fig. 4.13

FAZA B **Schimbarea fluxului**

Vîrful n a fost marcat. Să schimbăm fluxul după cum urmează. Vîrful n fiind marcat $[j, k, +, \varepsilon_n]$, să adăugăm ε_n la $f_{j,n;k}$, apoi să trecem la vîrful j. Procedeul general este atunci: dacă vîrful p este marcat $[i, k, +, \varepsilon_p]$, se adaugă ε_n la $f_{i,p;k}$; dacă vîrful p este marcat $[i, k, -, \varepsilon_p]$ se scade ε_n din $f_{p,i;k}$; în ambele cazuri se trece la vîrful i. Se repetă operația pînă cînd vîrful 1 este atins, adică ε_n a fost adăugat la un arc $(1, j; k)$.

Să ștergem acum toate marcajele și să reluăm faza A.

Ambele eventualități de mai sus sînt reprezentate, respectiv, pe figurile 4.14 și 4.15.

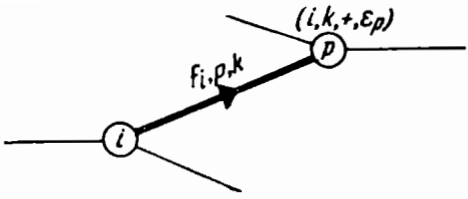


Fig. 4.14

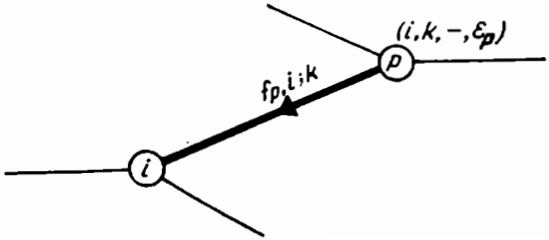


Fig. 4.15

FAZA C **Schimbarea datelor evenimentelor**

Vîrful n n-a putut fi marcat. Să definim mulţimile de arce $\mathbf{A}_1$ şi $\mathbf{A}_2$:

$$\mathbf{A}_1 = \{ (i, j ; k) \mid i \text{ marcat}, j \text{ nemarcat}, \overline{d}_{i,j;k} < 0\}, \tag{4.39}$$

$$\mathbf{A}_2 = \{ (i,j ; k) \mid i \text{ nemarcat.}, j \text{ marcat}, \overline{d}_{i,j;k} > 0\} \tag{4.40}$$

Să calculăm

$$\delta_1 = \underset{\mathbf{A}_1}{\text{MIN}} \ [- \overline{d}_{i,j;k}], \tag{4.41}$$

$$\delta_2 = \underset{\mathbf{A}_2}{\text{MIN}} \ [\overline{d}_{i,j;k}], \tag{4.42}$$

Să luăm

$$\delta = \min \ (\delta_1, \ \delta_2). \tag{4.43}$$

Să schimbăm datele vîrfurilor i scăzînd δ din toţi t_i corespunzători unui vîrf i nemarcat.

Să ştergem acum toate marcajele şi să reluăm faza A.

Un arc al mulţimii $\mathbf{A}_1$ este prezentat pe fig. 4.16 şi un arc al mulţimii $\mathbf{A}_2$ este reprezentat pe fig. 4. 17.

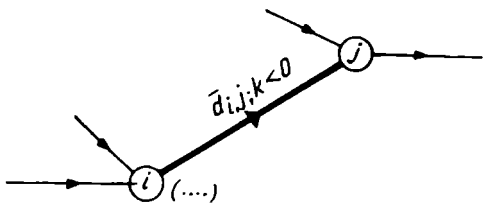


Fig. 4.16

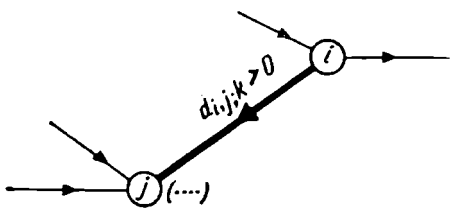


Fig. 4.17

În concluzie, algoritmul generează fluxuri succesive și date t_i care satisfac proprietățile (4.28) — (4.30). Curba OA, locul soluțiilor optimale, este liniară între două valori succesive ale lui $\lambda = t_n$ generate de algoritm.

Costul total al ansamblului lucrărilor este dat, pentru fiecare valoare a lui λ calculată, de relația

$$p(\lambda) = K - [\lambda v - \sum_{k} \sum_{(i,j) \in U} d_{i,j;k} \; f_{i,j;k}], \tag{4.44}$$

unde K este constanta :

$$K = \sum_{(i,j) \in U} [k_{ij} - D_{i,j} \, c_{i,j}]. \tag{4.45}$$

Metoda descrisă mai înainte se generalizează la cazul în care curbele $p_{ij} = f(t_{ij})$ nu sînt numai segmente de dreaptă pentru fiecare operație, ci curbe convexe formate din segmente de dreaptă între d_{ij} și D_{ij}. Aceasta introduce în graf un arc suplimentar din vîrful i la vîrful j pentru fiecare punct unghiular al curbei $p_{ij} = f(t_{ij})$ (fig. 4.18 și fig. 4.19).

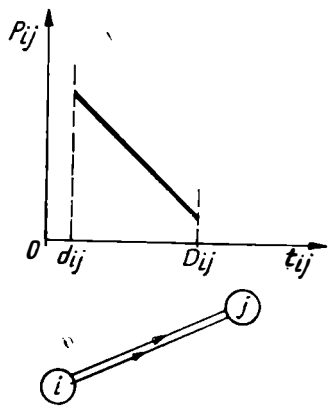


Fig. 4.18

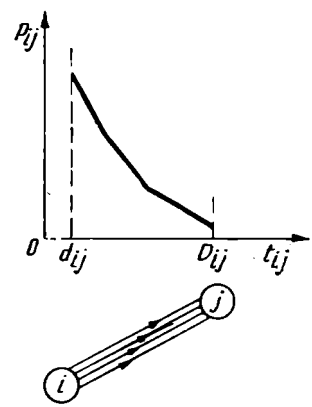


Fig. 4.19

4.9. EXEMPLU *) DE APLICARE A ALGORITMULUI LUI FULKERSON

Un exemplu simplu va permite cititorului să se familiarizeze cu acest algoritm, al cărui aspect teoretic poate părea greoi.

Se consideră un program de lucrări al cărui graf este acela din fig. 4.20. Tabelul 4.4 dă valorile lui $d_{i,j}$, $D_{i,j}$ și $c_{i,j}$.

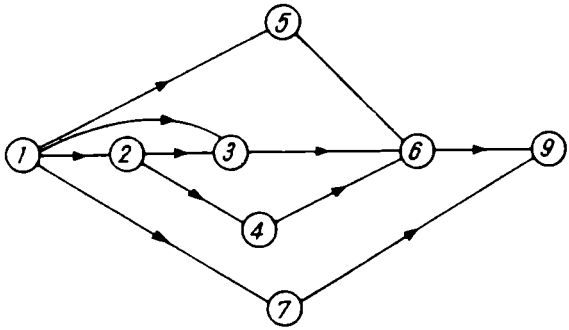


Fig. 4.20

Tabelul 4.4

$t_{i,j}$	$d_{i,j}$	$D_{i,j}$	$c_{i,j}$
$t_{1,2}$	11	20	1,00
$t_{2,3}$	30	50	1,50
$t_{3,6}$	32	52	3,00
$t_{6,8}$	6	8	5,00
$t_{1,3}$	12	36	4,66
$t_{2,4}$	21	27	6,00
$t_{4,6}$	25	50	1,00
$t_{1,5}$	33	36	1,00
$t_{5,6}$	60	80	2,00
$t_{1,7}$	12	22	1,30
$t_{7,8}$	50	90	2,00

*) Am reluat un exemplu dat în [20], dar calculul este făcut aici cu ajutorul algoritmului lui Fulkerson.

Pornirea

Se calculează datele evenimentelor luînd pe $D_{i,j}$ ca valoare a timpului operator prin metoda generală (prezentată în capitolul 1) și ale cărei formule sînt amintite în (4.32). Se ia pentru fiecare arc un flux nul. Programul este acela care corespunde punctului zero din fig. 4.7.

În fig. 4.21 datele evenimentelor sînt încadrate. Numerele din paranteză sînt marginile libere ale operațiilor. Se vede că $\lambda_1 = t_n = 130$.

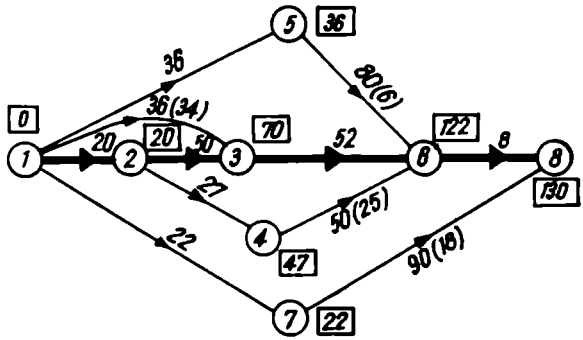


Fig. 4.21

Procesul de afișaj

1° Pentru a întreprinde procesul de afișaj trebuie să începem prin a calcula pentru fiecare arc valorile

$$\bar{d}_{i,j;1} = D_{i,j} + t_i - t_j$$

și

$$\bar{d}_{i,j;2} = d_{i,j} + t_i - t_j .$$

Aceste valori sînt reproduse în tabelul 4.5.

FAZA A. În coloana $\bar{d}_{i,j;2}$ nu există zerouri; se trece atunci direct la partea a doua a procesului de afișaj, utilizînd coloana lui $\bar{d}_{i,j;1}$:

$$\bar{d}_{1,2;1} = 0 \text{ și } f_{1,2;1} = 0 < c_{1,2;1} = 1{,}0 ;$$

Tabelul 4.5

Operația	$t_i - t_j$	$\bar{d}_{i,j;1} = D_{i,j} + t_i - t_j$	$\bar{d}_{i,j;1} = d_{i,j} + t_i - t_j$
(1,2)	0 − 20 = − 20	20 − 20 = 0	11 − 20 = − 9
(2,3)	20 − 70 = − 50	50 − 50 = 0	30 − 50 = − 20
(3,6)	70 − 122 = − 52	52 − 52 = 0	32 − 52 = − 20
(6,8)	122 − 130 = − 8	8 − 8 = 0	6 − 8 = − 2
(1,3)	0 − 70 = − 70	36 − 70 = −34	12 − 70 = − 58
(2,4)	20 − 47 = − 27	27 − 27 = 0	21 − 27 = − 6
(4,6)	47 − 122 = − 75	50 − 75 = − 25	25 − 75 = − 50
(1,5)	0 − 36 = − 36	36 − 36 = 0	33 − 36 = − 3
(5,6)	36 − 122 = − 86	80 − 86 = − 6	60 − 86 = − 26
(1,7)	0 − 22 = − 22	22 − 22 = 0	12 − 22 = − 10
(7,8)	22 − 130 = − 108	90 − 108 = − 18	50 − 108 = − 58

se atribuie vîrfului 2 marcajul [1, 1, + , 1].

$$\bar{d}_{2\,3;\,1} = 0 \quad \text{și} \quad f_{2,3;\,1} = 0 < c_{2,3;\,1} = 1{,}50,$$

$$\varepsilon\,(3) = \min\,[\varepsilon_2,\ c_{2,3;\,1} - f_{2,3;\,1}] = \min\,[1{,}1{,}5] = 1\,;$$

se atribuie vîrfului 3 marcajul [2, 1, + , 1| etc.

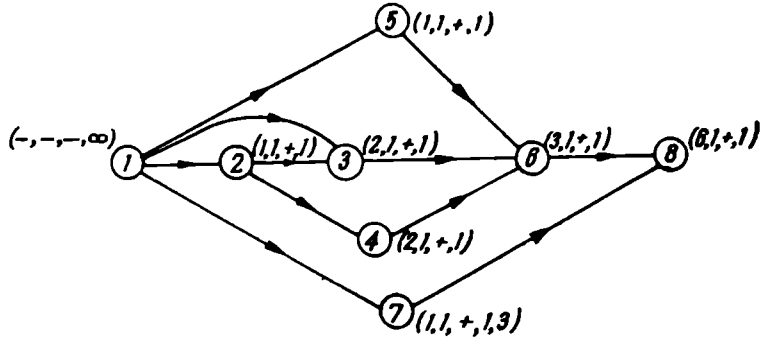


Fig. 4.22

Vîrful 8 este atins și poartă marcajul [6, 1, +, 1] (fig. 4.22).

FAZA B. Fluxul este mărit cu o unitate și devine 1 în arcele

$$(1, 2, 1), (2, 3, 1), (3, 6, 1), (6, 8, 1),$$

în timp ce în celelalte arce fluxul rămîne 0.

FAZA A. Se reîncepe procesul de afișaj cu acest flux nou. Nu se mai poate marca vîrful 2, pentru că

$$f_{1.2:1} = 1 = c_{1.2:1}.$$

Singurele vîrfuri care se pot marca sînt vîrfurile 5 și 7 (fig. 4.23).

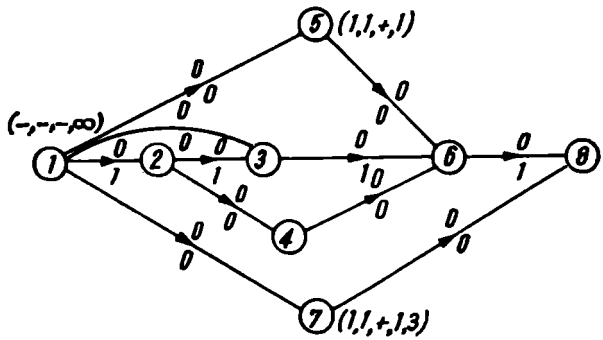


Fig. 4.23

Vîrful 8 nefiind marcat se trece la faza C.

FAZA C. Se consideră numai mulțimea $\mathbf{A}_1$.

$$- \overline{d}_{1.2:2} = 9,$$

$$- \overline{d}_{1.3:2} = 58, \qquad - \overline{d}_{1.3:1} = 34,$$

$$- \overline{d}_{5.6:2} = 26, \qquad - \overline{d}_{5.6:1} = 6,$$

$$- \overline{d}_{7.8:2} = 58, \qquad - \overline{d}_{7.8:1} = 18,$$

$$\delta_1 = \text{MIN}\,[- \overline{d}_{i,j:k}] = 6,$$

$$\delta = 6.$$

De aici rezultă noile date ale evenimentelor marcate (fig. 4.24). Noile date sînt încadrate. Fluxurile nu figurează pe acest graf.

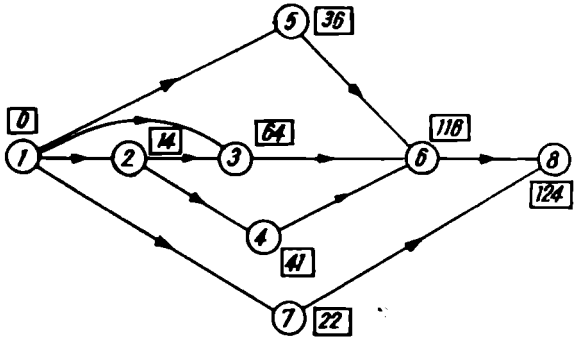


Fig. 4.24

Să calculăm acum creşterea costului total al ansamblului lucrărilor.

După (4.44),

$$p\ (\lambda) = K - [\lambda v - \sum_{i,j,k} d_{i,j;\,k}\ f_{i,j,k}].$$

Pentru $\lambda = 130$:

$$p\ (130) = K, \text{ pentru că } f_{i,j;\,k} = 0 \text{ pentru toţi } i,j \text{ şi } k.$$

Pentru $\lambda = 124$:

$$p(124) = K - [\ 124 - \underbrace{(20 + 50 + 52 + 8)}_{Z_{124}}] = K - (-6).$$

Creşterea costului total este atunci $\Delta p = 6$.

Timpii operatori sînt calculaţi prin formula (4.27) :

$$t_{i\,j} = \min\ [D_{i,j}\ ,\ (t_j - t_i\ )]$$

şi graful programului optimal $t_8 = \lambda = 124$ este acela din fig. 4.25. Numerele încadrate sînt datele evenimentelor. Numerele înscrise pe arce sînt timpii operatori. Numerele din paranteze sînt marginile libere ale operaţiilor corespunzătoare. $P_{1,3}$ are ca margine liberă 28 ; $P_{4,6}$ are ca margine liberă 25 şi $P_{7,8}$ are ca margine liberă 12. Există două drumuri critice : [1, 2, 3, 6, 8] şi [1, 5, 6, 8].

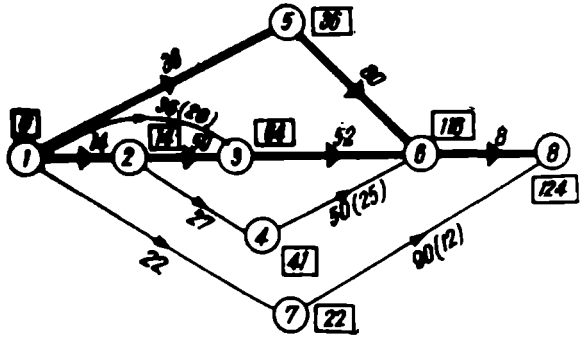


Fig. 4.25

2° Înainte de a ne întoarce la faza A, trebuie să stabilim un nou tabel (tabelul 4.6), analog tabelului 4.5, cu toate datele calculate mai înainte.

Tabelul 4.6

Operația	$t_i - t_j$	$\bar{d}_{i,j;1} = D_{i,j} + t_i - t_j$	$\bar{d}_{i,j;2} = d_{i,j} + t_i - t_j$
(1,2)	0 − 14 = − 14	20 − 14 = 6	11 − 14 = − 3
(2,3)	14 − 64 = − 50	50 − 50 = 0	30 − 50 = − 20
(3,6)	64 − 116 = − 52	52 − 52 = 0	32 − 52 = − 20
(6,8)	116 − 124 = − 8	8 − 8 = 0	6 − 8 = − 2
(1,3)	0 − 64 = − 64	36 − 64 = − 28	12 − 64 = − 52
(2,4)	14 − 41 = − 27	27 − 27 = 0	21 − 27 = − 6
(4,6)	41 − 116 = − 75	50 − 75 = − 25	25 − 75 = − 50
(1,5)	0 − 36 = − 36	36 − 36 = 0	33 − 36 = − 3
(5,6)	36 − 116 = − 81	80 − 80 = 0	60 − 80 = − 20
(1,7)	0 − 22 = − 22	22 − 22 = 0	12 − 22 = − 10
(7,8)	22 − 124 = − 102	90 − 102 = − 12	50 − 102 = − 52

FAZA A. În coloana $d_{i,j;2}$ nu există zerouri, se trece deci direct la partea a doua a procesului de afișaj folosind coloana $d_{i,j;1}$:

$$\bar{d}_{1,5;1} = 0 \text{ și } f_{1,5;1} = 0 < c_{1,5;1} = c_{1,5} = 1{,}00\,;$$

vîrful 5 va fi deci marcat [1, 1, +, 1]. La fel vîrful 6 va fi marcat [5, 1, +, 1]. Regula (4.36) permite marcarea vîrfurilor 3 şi 2 etc. Se obţine graful din fig. 4.26.

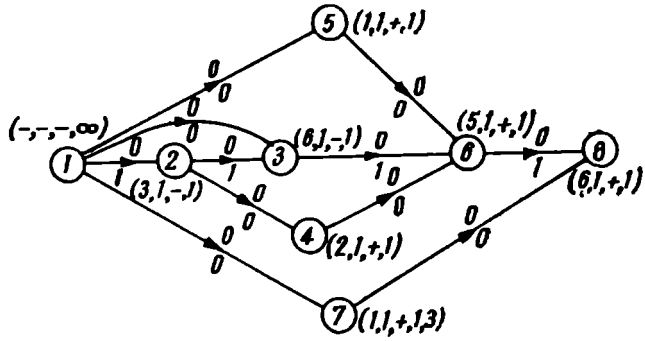


Fig. 4.26

Vîrful 8 a fost marcat, se poate deci mări fluxul trecînd la faza B.

FAZA B. Fluxul este mărit cu o unitate în arcele : (6, 8 ; 1), (5, 6 ; 1) şi (1, 5 ; 1), el rămânînd neschimbat în celelalte arce.

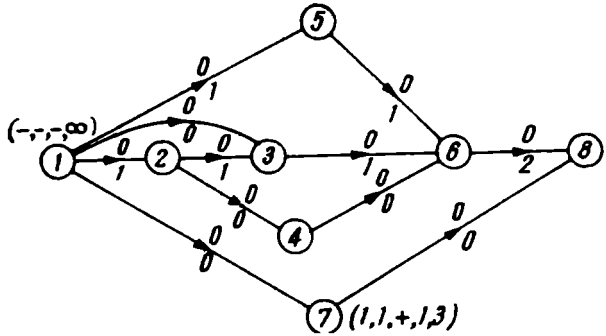


Fig. 4.27

FAZA A. Se reîncepe procesul de afişaj cu acest nou flux. Nu se mai poate marca vîrful 5 pentru că, deşi $d_{1,5} = 0$, avem acum

$$f_{1,5;1} = c_{1,5} = 1.$$

Singurul vîrf care se poate marca este vîrful 7 (fig. 4.27).

Vîrful 3 nefiind marcat se trece la faza C.

FAZA C. Se consideră numai mulțimea $\mathbf{A}_1$.

$$- \overline{d}_{1,2;\,2} = 3$$

$$- \overline{d}_{1,3;\,2} = 52, \qquad - \overline{d}_{1,3;\,1} = 28,$$

$$- \overline{d}_{1,5;\,2} = 3$$

$$- \overline{d}_{7,8;\,2} = 52, \qquad - \overline{d}_{7,8;\,1} = 12,$$

$$\delta_1 = \mathrm{MIN}[\, - \overline{d}_{i,j;\,k}\,] = 3,$$

$$\delta = 3.$$

De aici rezultă noile date ale evenimentelor nemarcate din figura precedentă.

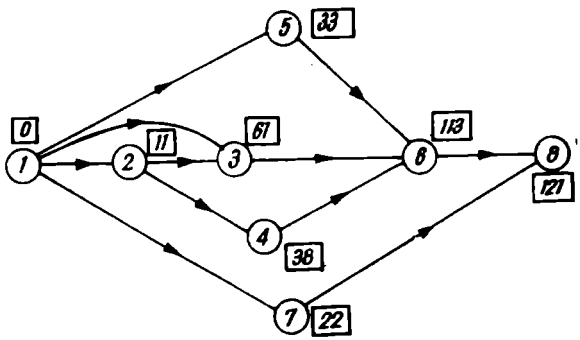


Fig. 4.28

Noile date sînt încadrate în fig. 4.28. Fluxurile nu figurează în acest graf. Aplicarea formulei (4.44) dă

$$p\,(121) = K - [121 \times 2 - \underbrace{(Z_{124} + 36 + 80 + 8)}_{Z_{121}}],$$

unde Z_{124} este cantitatea $20 + 50 + 52 + 8$ pe care am întîlnit-o în calculul lui Δp pentru $\lambda = 124$.

Creșterea costului total Δp în raport cu $p\,(130)$ este

$$\Delta p = p\ (121) - p\,(130) \ = \ 130 + \ 124 - 242 = 12.$$

Mai general, se poate arăta că la fiecare iterație creșterea costului total Δp este dată de formula

$$\Delta p = Z_0 + (v - v_0)\,\lambda_0 - v\,\lambda,$$

unde Z_0, v_0 și λ_0 se referă la iterația precedentă și $Z = Z_0 + (v - v_0)\,\lambda_0$. La fel, creșterea costului în raport cu iterația precedentă este

$$\Delta' p = \Delta p - \Delta p_0.$$

În cazul de față, avem

$$\Delta' p = 12 - 6 = 6.$$

Graful programului optimal $t_8 = \lambda = 121$ este cel din fig. 4.29.

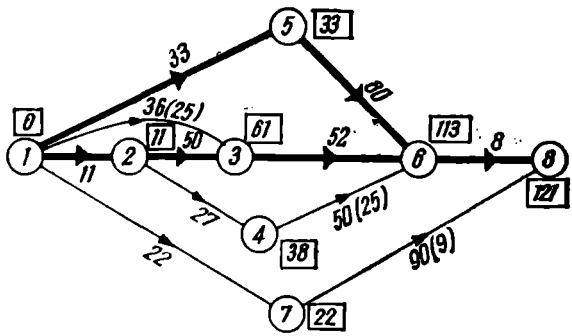


Fig. 4.29

Numerele încadrate reprezintă datele evenimentelor. Numerele înscrise pe arce sînt timpii operatori. Numerele dintre paranteze sînt marginile libere ale operațiilor corespunzătoare : $P_{1,3}$ are ca margine liberă 25 ca și $P_{4,6}$; $P_{7,8}$ are ca margine liberă 9.

Există două drumuri critice : [1, 2, 3, 6, 8] și [1, 5, 6, 8].

3° Înainte de a ne reîntoarce la faza A, să stabilim un nou tabel (tabelul 4.7), analog tabelului 4.5, cu datele calculate mai înainte.

Tabelul 4.7

Operația	$t_i - t_j$	$\bar{d}_{i,j;1} = D_{i,j} + t_i - t_j$	$\bar{d}_{i,j;2} = d_{i,j} + t_i - t_j$
(1,2)	0 − 11 = − 11	20 − 11 = 9	11 − 11 = 0
(2,3)	11 − 61 = − 50	50 − 50 = 0	30 − 50 = − 20
(3,6)	61 − 113 = − 52	52 − 52 = 0	32 − 52 = − 20
(6,8)	113 − 121 = − 8	8 − 8 = 0	6 − 8 = − 2
(1.3)	0 − 61 = − 61	36 − 61 = − 25	11 − 61 = − 49
(2,4)	11 − 38 = − 27	27 − 27 = 0	21 − 27 = − 6
(4,6)	38 − 113 = − 75	50 − 75 = − 25	25 − 75 = − 50
(1,5)	0 − 33 = − 33	36 − 33 = 3	33 − 33 = 0
(5,6)	33 − 113 = − 80	80 − 80 = 0	60 − 80 = − 20
(1,7)	0 − 22 = − 22	22 − 22 = 0	12 − 22 = − 10
(7,8)	22 − 121 = − 99	90 − 99 = − 9	50 − 99 = − 49

FAZA A. Există acum două zerouri în coloana $\bar{d}_{i,j;2}$. Vîrfurile 5 și 2 vor fi deci marcate [1, 2, + , ∞].

$$\bar{d}_{2,3;1} = 0 \text{ și } f_{2,3;1} = 1 < c_{2,3;1} = 1{,}50\,;$$

vîrful 3 va fi deci marcat [2, 1, + , 0,50]. La fel, vîrful 6 va fi marcat [3, 1, +, 0,50] etc.

Se obține graful din fig. 4.30.

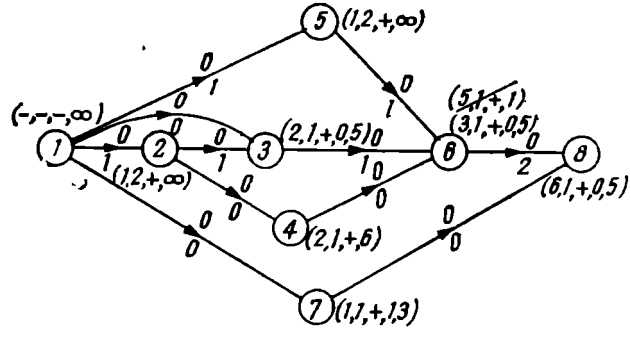


Fig. 4.30

Se vede că vîrful 6 are două marcaje corespunzătoare respectiv vîrfurilor anterioare 5 și 3. În acest caz, se ia la alegere unul sau altul dintre marcaje și se șterge marcajul sau marcajele neselecționate.

Aici reţinem pentru vîrful 6 marcajul [3, 1, +, 0,50].

Vîrful 8 a fost marcat, deci se poate mări fluxul trecînd la faza B.

FAZA B. Fluxul este mărit cu 0,50 în arcele (6,8 ; 1), (3,6 ; 1), (2,3 ;1) şi (1,2 ;2). Trebuie să considerăm aici arcul (1,2 ;2) pentru că marcajul vîrfului 2 este [1, 2, +, ∞]. Ştim că, de fapt, arcele din figurile precedente sînt dedublate, cum se vede în fig. 4.11, deşi acest lucru nu este reprezentat în figurile precedente. Fluxurile arcelor (i,j ;2) vor fi de acum înainte notate *deasupra* arcelor.

FAZA A. Se reîncepe procesul de afişaj cu acest nou flux. Vîrful 6 este marcat [5, 1, +, 1] şi vîrful 8 este marcat [6, 1, +, 1]. Se obţine graful din fig. 4.31.

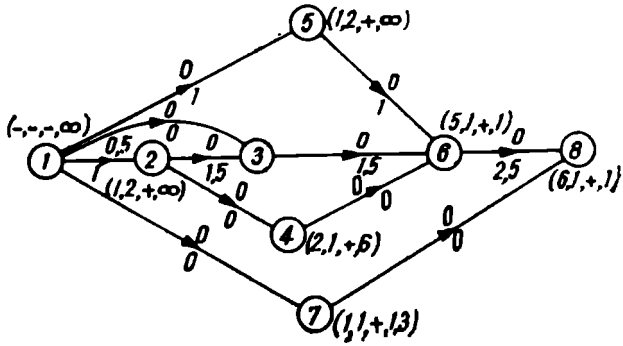


Fig. 4.31

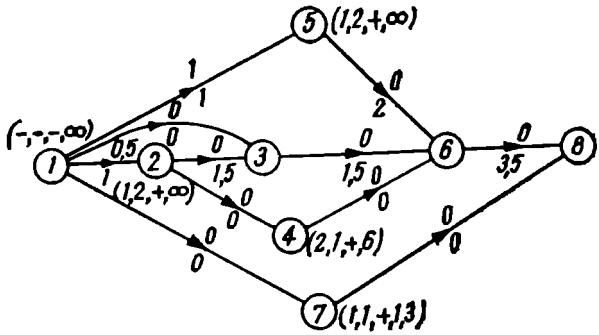


Fig. 4.32

Se poate mări fluxul trecînd la faza B.

FAZA B. Fluxul este mărit cu 1 în arcele (6, 8; 1), (5, 6; 1) și (1, 5; 2).

FAZA A. Se reîncepe procesul de marcare cu acest nou flux. Nu se mai poate marca vîrful 6 pentru că, deși $\bar{d}_{5,6;1} = 0$, avem acum

$$f_{5,6;1} = c_{5,6;1} = c_{5,6} = 2{,}00.$$

Vîrfurile marcate sînt trecute în fig. 4.32.

Vîrful 8 nefiind marcat se trece la faza C.

FAZA C. Se ia în considerare numai mulțimea $\mathbf{A}_1$ pentru că nu există arce $(i,j;k)$ cu vîrful i nemarcat și vîrful j marcat.

$$-\bar{d}_{1,3;2} = 49, \qquad -\bar{d}_{1,3;1} = 25,$$

$$-\bar{d}_{2,3;2} = 20,$$

$$-\bar{d}_{5,6;2} = 20,$$

$$-\bar{d}_{4,6;2} = 50, \qquad -\bar{d}_{4,6;1} = 25,$$

$$-\bar{d}_{7,8;2} = 49, \qquad -\bar{d}_{7,8;1} = 9,$$

$$\delta_1 = \underset{\mathbf{A}_1}{\mathrm{MIN}} \left[-\bar{d}_{i,j;k}\right] = 9,$$

$$\delta = 9.$$

De aici rezultă noile date ale evenimentelor nemarcate din figura precedentă.

Noile date sînt încadrate în fig. 4.33. Fluxurile nu figurează în acest graf.

Creșterea costului total în raport cu p (130) este

$$\Delta p = \underbrace{Z_{121} + (3{,}5 - 2) \cdot 121}_{Z_{112}} - 3{,}5 \cdot 112$$

sau

$$\Delta p = 254 + 181{,}5 - 392 = 43{,}5.$$

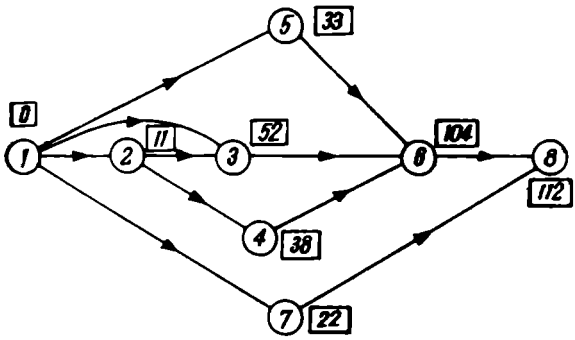


Fig. 4.33

Şi creşterea costului în raport cu p (121) este

$$\Delta' p = 43{,}5 - 12 = 31{,}5.$$

Timpii operatori sînt calculaţi prin formula (4.27) :

$$t_{i,j} = \min\ [D_{ij},\ (t_j - t_i)].$$

Graful programului optimal $t_8 = \lambda = 112$ este cel din fig. 4.34.

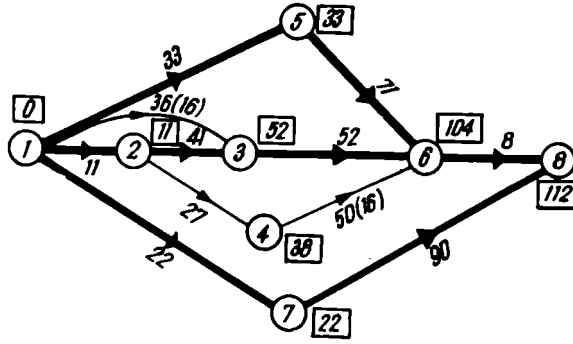


Fig. 4.34

Numerele încadrate reprezintă datele evenimentelor. Numerele înscrise pe arce sînt timpii operatori, iar numerele din paranteze sînt marginile libere ale operaţiilor corespunzătoare. $P_{1,3}$ are margine liberă 16, la fel ca $P_{4,6}$.

Există trei drumuri critice : [1, 2, 3, 6, 8] ; [1, 5, 6, 8] şi [1, 7, 8].

4° Înainte de a ne întoarce la faza A, trebuie să stabilim un nou tabel (tabelul 4.8) analog tabelului 4.5, cu datele calculate mai înainte.

Tabelul 4.8

Operația	$t_i - t_j$	$\bar{d}_{ij;1} = D_{i,j} + t_i - t_j$	$\bar{d}_{i,j;2} = d_{i,j} + t_i - t_j$
(1,2)	0 − 11 = − 11	20 − 11 = 9	11 − 11 = 0
(2,3)	11 − 52 = − 41	50 − 41 = 9	30 − 41 = − 11
(3,6)	52 − 104 = − 52	52 − 52 = 0	32 − 52 = − 20
(6,8)	104 − 112 = − 8	8 − 8 = 0	6 − 8 = − 2
(1,3)	0 − 52 = − 52	36 − 52 = − 16	12 − 52 = − 40
(2,4)	11 − 38 = − 27	27 − 27 = 0	21 − 27 = − 6
(4,6)	38 − 104 = − 66	50 − 66 = − 16	25 − 66 = − 41
(1,5)	0 − 33 = − 33	36 − 33 = 3	33 − 33 = 0
(5,6)	33 − 104 = − 71	80 − 71 = 9	60 − 71 = − 11
(1,7)	0 − 22 = − 22	22 − 22 = 0	12 − 22 = − 10
(7,8)	22 − 112 = − 90	90 − 90 = 0	50 − 90 = − 40

FAZA A. Există două zerouri în coloana $\bar{d}_{i,j;2}$. Vîrfurile 5 și 2 vor fi deci marcate [1, 2, +, ∞].

$$\bar{d}_{1,7;1} = 0 \text{ și } f_{1,7;1} = 0 < c_{1,7;1} = c_{1,7} = 1{,}30;$$

vîrful 7 va fi deci marcat [1, 1, +, 1,30].

De asemenea vîrful 8 va fi marcat [7, 1, +, 1,30]. Se obține graful din fig. 4.35.

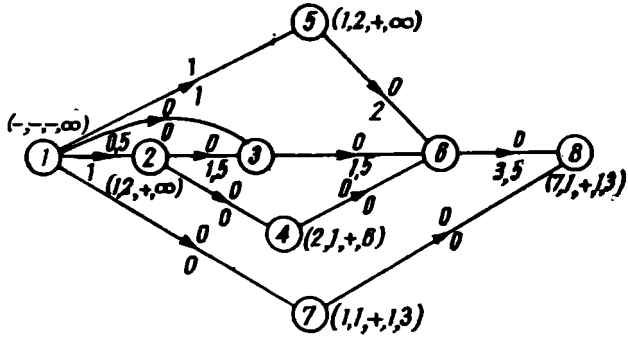


Fig. 4.35

Vîrful 8 fiind marcat, se poate mări fluxul trecînd la faza B.

FAZA B. Fluxul este mărit cu 1,3 în arcele (7,8 ;1) şi (1,7 ;1). El rămîne neschimbat în celelalte arce.

FAZA A. Se reîncepe procesul de marcare cu acest nou flux. Nu se mai poate marca vîrful 8 pentru că, deşi $\overline{d}_{1,7;1} = 0$, avem acum

$$f_{1;7,1} = c_{1;7,1} = c_{1;7} = 1{,}3.$$

Vîrfurile marcate sînt indicate pe fig. 4.36, ca şi noile fluxuri.

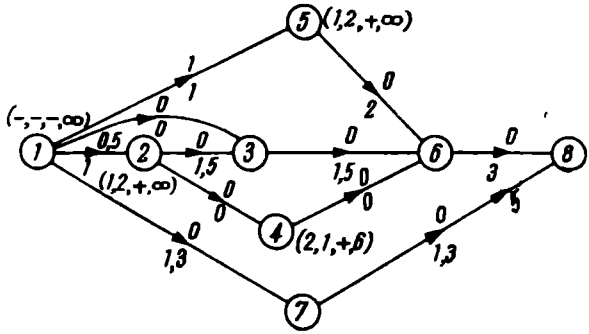


Fig. 4.36

Vîrful 8 nefiind marcat, se trece la faza C.

FAZA C. Se consideră numai mulţimea $\mathbf{A}_1$ pentru că nu există arce $(i, j\,;k)$ cu i nemarcat şi j marcat.

$$-\overline{d}_{1\,3;2} = 40, \qquad -\overline{d}_{1,3;1} = 16,$$

$$-\overline{d}_{1,7;2} = 10,$$

$$-\overline{d}_{2,3;2} = 11,$$

$$-\overline{d}_{5,6;2} = 11,$$

$$-\overline{d}_{4,6;2} = 41, \qquad -\overline{d}_{4,6;1} = 16,$$

$$\delta_1 = \underset{\mathbf{A}_1}{\mathrm{MIN}}\,[-\overline{d}_{i,j;k}] = 10,$$

$$\delta = 10.$$

De aici rezultă noile date ale evenimentelor nemarcate din figura precedentă.

Noile date sînt încadrate în fig. 4.37. Fluxurile nu figurează în acest graf.

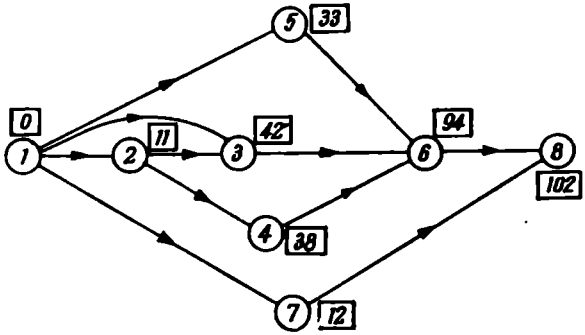


Fig. 4.37

Creşterea costului total în raport cu p (130) este

$$\Delta p = \underbrace{Z_{112} + (4{,}8 - 3{,}5)\ 112}_{Z_{102}} - 4{,}8 \cdot 102$$

sau

$$\Delta p = 435{,}5 + 145{,}6 - 489{,}5 = 91{,}5.$$

Creşterea costului în raport cu p (112) este

$$\Delta' p = 91{,}5 - 43{,}5 = 48\ .$$

Timpii operatori sînt calculaţi prin formula (4.27) :

$$t_{i,j} = \min\ [D_{i,j},\ (t_j - t_i)].$$

Graful programului optimal $t_8 = \lambda = 102$ este cel din fig. 4.38. Numerele încadrate reprezintă datele evenimentelor. Numerele înscrise pe arce sînt timpii operatori, iar numerele din paranteze sînt marginile libere ale operaţiilor corespunzătoare. P_{13} are ca margine liberă 6, la fel ca şi $P_{4.6}$.

Există trei drumuri critice : [1, 2, 3, 6, 8] ; [1, 5, 6, 8] şi [1, 7, 8].

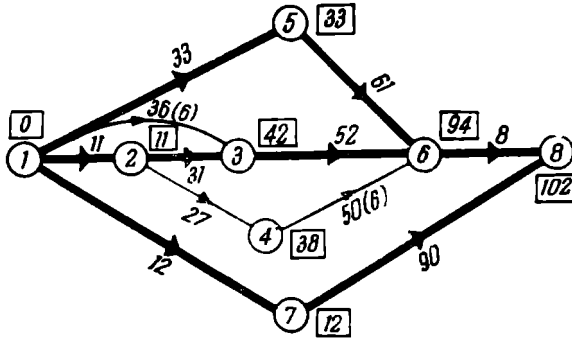


Fig. 4.38

5° Înainte de a reîncepe faza A, trebuie să stabilim un nou tabel (tabelul 4.9), analog tabelului (4.5), cu datele calculate mai înainte.

Tabelul 4.9

Operația	$t_i - t_j$	$\bar{d}_{i,j;1} = D_{ij} + t_i - t_j$	$\bar{d}_{i,j;2} = d_{ij} + t_i - t_j$
1,2	$0 - 11 = -11$	$20 - 11 = 9$	$11 - 11 = 0$
2,3	$11 - 42 = -31$	$50 - 31 = 19$	$30 - 31 = -1$
3,6	$42 - 94 = -52$	$52 - 52 = 0$	$32 - 52 = -20$
6,8	$94 - 102 = -8$	$8 - 8 = 0$	$6 - 8 = -2$
1,3	$0 - 42 = -42$	$36 - 42 = -6$	$12 - 42 = -30$
2,4	$11 - 38 = -27$	$27 - 27 = 0$	$21 - 27 = -6$
4,6	$38 - 94 = -56$	$50 - 56 = -6$	$25 - 56 = -31$
1,5	$0 - 33 = -33$	$36 - 33 = 3$	$33 - 33 = 0$
5,6	$33 - 94 = -61$	$80 - 61 = 19$	$60 - 61 = -1$
1,7	$0 - 12 = -12$	$22 - 12 = 10$	$11 - 12 = 0$
7,8	$12 - 102 = -90$	$90 - 90 = 0$	$50 - 90 = -40$

FAZA A. Există acum trei zerouri în coloana $\bar{d}_{i,j;2}$.
Vîrfurile 5, 2 și 7 vor fi deci marcate cu $[1, 2, +, \infty]$.

$$d_{7,8;1} = 0 \text{ și } f_{7,8;1} = 1{,}30 < c_{7,8;1} = c_{7,8} = 2{,}00.$$

Vîrful 8 va fi deci marcat cu [7, 1, +, 0,70] (fig. 4.39).

Se poate mări fluxul trecînd la faza B.

FAZA B. Fluxul este mărit cu 0,70 în arcele (7,8 ;1) și (1,7 ;2). El rămîne neschimbat pretutindeni în rest.

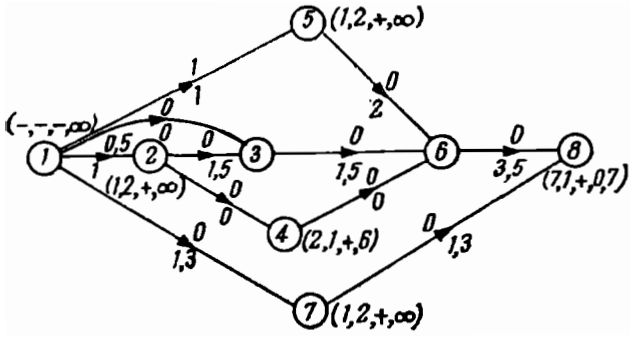


Fig. 4.39

FAZA A. Se reîncepe procesul de marcare cu acest nou flux. Nu se poate marca vîrful 8, pentru că

$$f_{7,8;1} = c_{7,8;1} = c_{7,8} = 2{,}00.$$

Vîrfurile marcate sînt indicate pe fig. 4.40, ca și noile fluxuri.

Vîrful 8 nefiind marcat, se trece la faza C.

FAZA C. Se consideră numai mulțimea $\mathbf{A}_1$ pentru că nu există arce $(i,j\,;k)$ cu i nemarcat și j marcat:

$$-\overline{d}_{1,3;2} = 30, \qquad -\overline{d}_{1,3;1} = 6,$$

$$-\overline{d}_{2,3;2} = 1,$$

$$-\overline{d}_{4,6;2} = 31, \qquad -\overline{d}_{4,6;1} = 6,$$

$$-\overline{d}_{5,6;2} = 1,$$

$$-\overline{d}_{7,8;2} = 40,$$

$$\delta_1 = \underset{\mathbf{A}_1}{\mathrm{MIN}} \left[-\overline{d}_{i,j;k} \right] = 1,$$

$$\delta = 1.$$

De aici rezultă noile date ale evenimentelor nemarcate din figura precedentă.

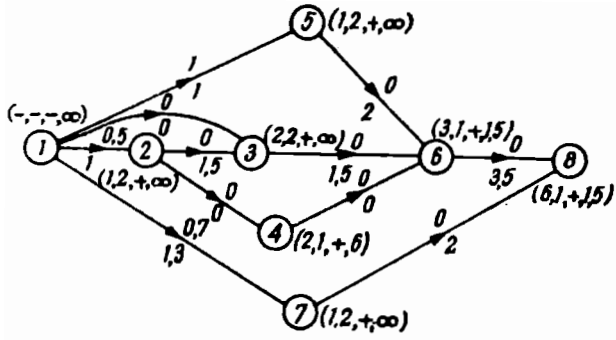


Fig. 4.40

Noile date sînt încadrate în fig. 4.41. Fluxurile nu figurează în acest graf.

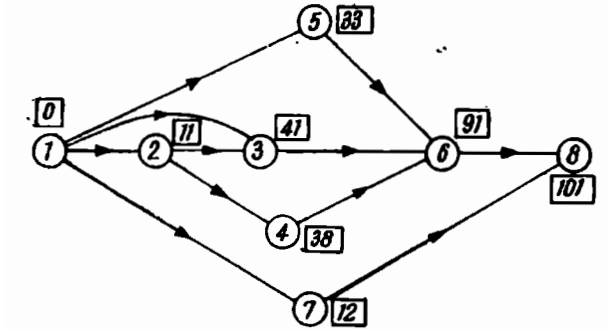


Fig. 4.41

Creşterea costului total în raport cu $p(130)$ este

$$\Delta p = Z_{102} + (5{,}5 - 4{,}8) \cdot 102 - 5{,}5 \cdot 101$$

sau

$$\Delta p = 581{,}1 + 71{,}4 - 555{,}5 = 97,$$

iar creşterea costului în raport cu $p(102)$ este

$$\Delta' p = 97{,}0 - 91{,}5 = 5{,}50.$$

Timpii operatori sînt calculați prin formula (4.27) :

$$t_{i,j} = \min \ [D_{ij}, \ (t_j - t_i)].$$

Graful programului optimal $t_8 = \lambda = 101$ este cel din fig. 4.42. $P_{1.3}$ are ca margine liberă 5, la fel ca și $P_{4.6}$.

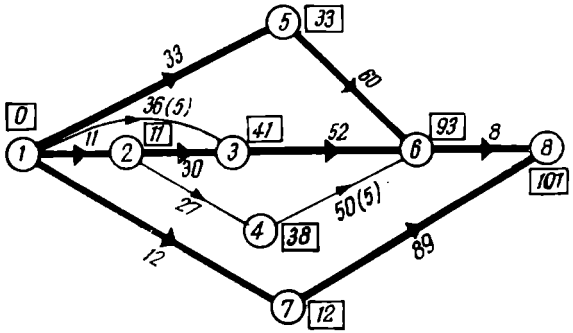


Fig. 4.42

Există trei drumuri critice : [1, 2, 3, 6, 8], [1, 5, 6, 8] și [1, 7, 8].

6° Înainte de a trece din nou la faza A, trebuie să stabilim un nou tabel (tabelul 4.10), analog tabelului 4.5, cu datele calculate mai înainte.

Tabelul 4.10

Operația	$t_i - t_j$	$\bar{d}_{i,j;1} = D_{ij} + t_i - t_j$	$\bar{d}_{i,j;2} = d_{ij} + t_i - t_j$
(1,2)	0 − 11 = − 11	20 − 11 = 9	11 − 11 = 0
(2,3)	11 − 41 = − 30	50 − 30 = 20	30 − 30 = 0
(3,6)	41 − 93 = − 52	52 − 52 = 0	32 − 52 = − 20
(6,8)	93 − 101 = − 8	8 − 8 = 0	6 − 8 = − 2
(1,3)	0 − 41 = − 41	36 − 41 = − 5	12 − 41 = − 29
(2,4)	11 − 38 = − 27	27 − 27 = 0	21 − 27 = − 6
(4,6)	38 − 93 = − 55	50 − 55 = − 5	25 − 55 = − 30
(1,5)	0 − 33 = − 33	36 − 33 = 3	33 − 33 = 0
(5,6)	33 − 93 = − 60	80 − 60 = 20	60 − 60 = 0
(1,7)	0 − 12 = − 12	22 − 12 = 10	12 − 12 = 0
(7,8)	12 − 101 = − 89	90 − 89 = 1	50 − 89 = − 39

FAZA A. Există cinci zerouri în coloana $\bar{d}_{i,j;2}$. Vîrfurile 2, 5 şi 7 sînt marcate [1, 2, +, ∞]. Vîrful 3 este marcat [2, 2, +, ∞] şi vîrful 6 este marcat [5, 2, +, ∞].

$$\bar{d}_{3.6;1} = 1 \text{ şi } f_{3.6;1} = 1{,}50 < c_{3.6;1} = c_{3.6} = 3{,}00.$$

Vîrful 6 mai are deci şi marcajul [3, 1, +, 1,50].

Vîrful 8 este marcat [6, 1, +, 1,50] şi se şterge marcajul [5, 2, +, ∞] al vîrfului 6 (fig. 4.43). Se poate mări fluxul trecînd la faza B.

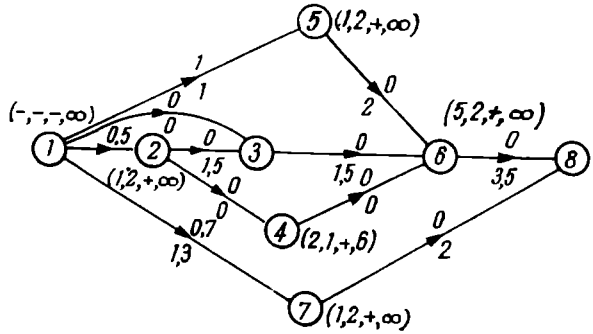


Fig. 4.43

FAZA B. Fluxul se măreşte cu 1,50 în arcele (6, 8, 1), (3, 6; 1), (2, 3; 2) şi (1, 2; 2), rămînînd în rest neschimbat.

FAZA A. Vîrful 8 nu mai poate fi marcat pentru că:

$$f_{6,8;1} = c_{6,8;1} = c_{6,8} = 5,\ 00.$$

Vîrfurile marcate sînt indicate pe fig. 4.44, ca şi noile fluxuri. Vîrful 8 nefiind marcat, se trece la faza C.

FAZA C.

$$-\ \bar{d}_{6.8;2} = 2,$$

$$-\ \bar{d}_{7.8;2} = 39,$$

$$\delta_1 = \underset{A_1}{\text{MIN}}\ [-\bar{d}_{i,j;k}] = 2,$$

$$\delta = 2.$$

De aici rezultă noua dată a lui 8, singura care este schimbată și este egală acum cu 99. Noul graf este cel din fig. 4.45.

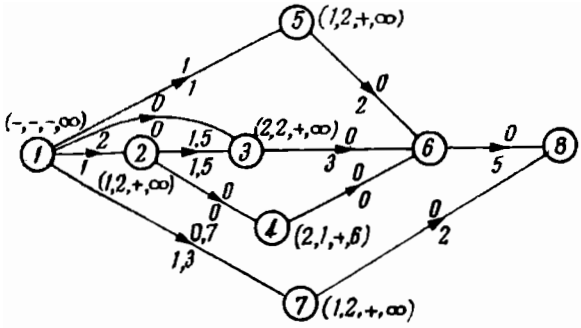


Fig. 4.44

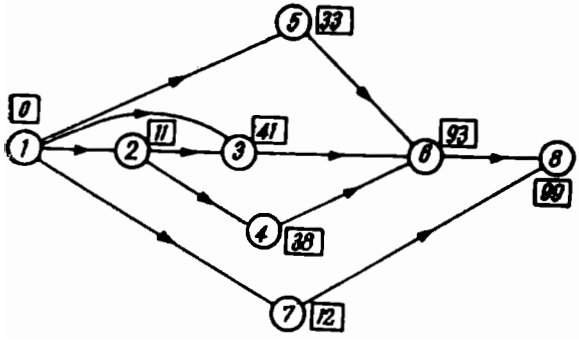


Fig. 4.45

Fluxurile nu sînt indicate pe figură.

Creșterea costului total în raport cu p (130) este

$$\Delta p = \underbrace{Z_{101} + (7 - 5{,}5) \cdot 101}_{Z_{99}} - 7 \cdot 99$$

sau

$$\Delta p = 652{,}5 + 151{,}5 - 693 = 111.$$

Creșterea costului în raport cu p (101) este

$$\Delta' p = 111 - 97 = 14.$$

Timpii operatori sînt calculați prin formula (4.27):

$$t_{i,j} = \min [D_{ij}, (t_j - t_i)].$$

Graful programului optimal $t_8 = \lambda = 99$ este cel din fig. 4.46. $P_{1,3}$ are ca margine liberă 5, la fel ca și $P_{4,6}$.

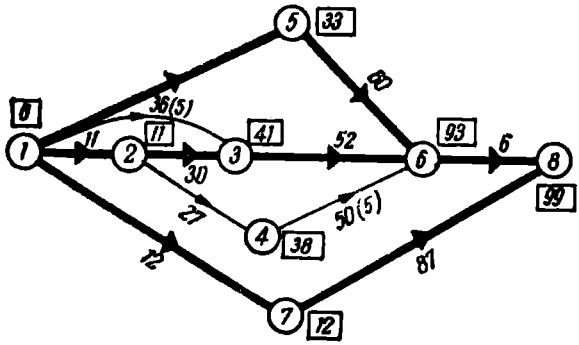


Fig. 4.46

Există trei drumuri critice: [1, 2, 3, 6, 8], [1, 5, 6, 8] și [1, 7, 8].

7° Înainte de a trece din nou la faza A, trebuie stabilit un nou tabel (tabelul 4.11), analog tabelului 4.5, cu datele calculate mai înainte.

Tabelul 4.11

Operația	$t_i - t_j$	$\bar{d}_{i,j;1} = D_{ij} + t_i - t_j$	$\bar{d}_{i,j;2} = d_{ij} + t_i - t_j$
1,2	0 − 11 = − 11	20 − 11 = 9	11 − 11 = 0
2,3	11 − 41 = − 30	50 − 30 = 20	30 − 30 = 0
3,6	41 − 93 = − 52	52 − 52 = 0	32 − 52 = − 22
6,8	93 − 99 = − 6	8 − 6 = 2	6 − 6 = 0
1,3	0 − 41 = − 41	36 − 41 = − 5	12 − 41 = − 29
2,4	11 − 38 = − 27	27 − 27 = 0	21 − 27 = − 6
4,6	38 − 93 = − 55	50 − 55 = − 5	25 − 55 = − 30
1,5	0 − 33 = − 33	36 − 33 = 3	33 − 33 = 0
5,6	33 − 93 = − 60	80 − 60 = 20	60 − 60 = 0
1,7	0 − 12 = − 12	22 − 12 = 10	12 − 12 = 0
7,8	12 − 99 = − 87	90 − 87 = 3	50 − 87 = − 37

FAZA A. Se atinge vîrful 8 prin arce $(i,j;2)$: drumul [1, 5, 6, 8] (fig. 4.47).

Calculele s-au terminat

S-a atins punctul A pe curba soluțiilor optimale din fig. 4.7. Tabelul 4.12 rezumă calculul paginilor precedente. [$M_{i,j}$ reprezintă marginea liberă a operației P_{ij} sau (i, j)].

Tabelul 4.12

Operațiile P_{ij}	Timpii operatori : $t_{i,j}$						
	0	1	2	3	4	5	6
(1,2)	20	14	11	11	11	11	11
(2,3)	50	50	50	41	31	30	30
(3,6)	52	52	52	52	52	52	52
(6,8)	8	8	8	8	8	8	6
(1,3)	36	36	36	36	36	36	36
$M_{1,3}$	34	28	25	16	6	5	5
(2,4)	27	27	27	27	27	27	27
(4,6)	50	50	50	50	50	50	50
$M_{4,6}$	25	25	25	16	6	5	5
(1,5)	36	36	33	33	33	33	33
(5,6)	80	80	80	71	61	60	60
$M_{5,6}$	6	—	—	—	—	—	—
(1,7)	22	22	22	22	12	12	12
(7,8)	90	90	90	90	90	89	87
$M_{7,8}$	18	12	9	—	—	—	—
$t_8 = \lambda$	130	124	121	112	102	101	99
Δt_8	—	6	3	9	10	1	2
Δp	—	6	12	43,5	91,5	97	111
$\Delta' p$	—	6	6	31,5	48	5,5	14
$\Delta' p/\Delta t_8$	—	1	2	3,5	4,8	5,5	7,0

Se poate trasa de asemenea curba OA, locul soluțiilor optimale (fig. 4.48). Aceasta este o curbă convexă formată din segmente de dreaptă. Pantele succesive ale acestor segmente de dreaptă sînt date în ultimul rînd al tabelului 4.12. Acest exemplu de aplicare a algo-

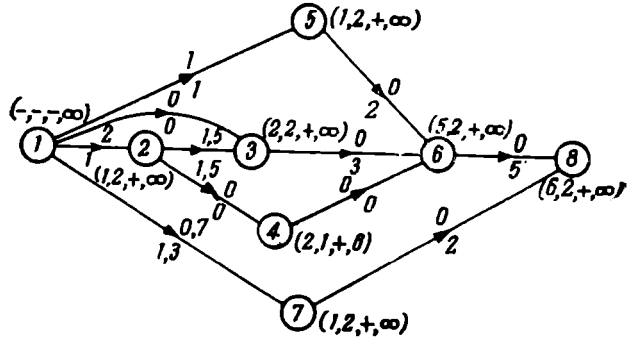


Fig. 4.47

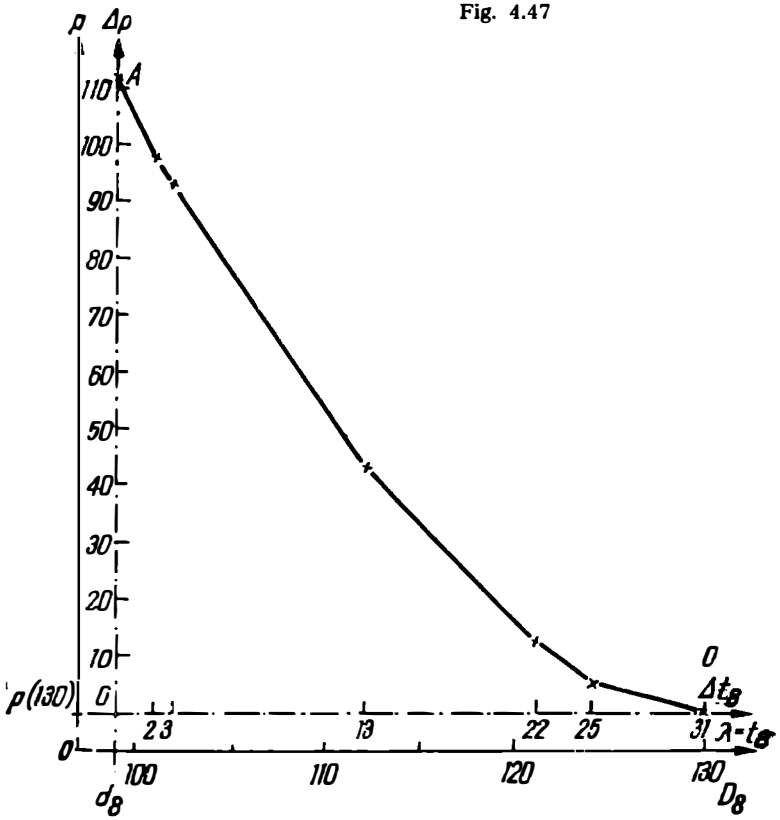


Fig. 4.48

ritmului lui Fulkerson a putut părea plictisitor. Totuși nu este inutil să tratăm complet un exemplu și să studiem în amănunțime toate operațiile pentru a avea siguranța că algoritmul s-a înțeles bine.

Evident, îndată ce graful posedă mai mult de 15 arce, calculul devine imposibil de realizat cu mijloacele obișnuite și trebuie încredințat unui calculator electronic.

4.10. PROGRAM OPTIMAL

Cu ajutorul programării liniare parametrice (vezi 4.6) sau mai bine cu ajutorul algoritmului lui Fulkerson (vezi 4.7 și 4.8) a fost posibil să se traseze curba OA, locul soluțiilor optimale. Dar oprirea unei instalații sau întîrzierea în livrarea unui ansamblu (uzină, vapor, imobil etc.) se poate traduce, în anumite cazuri, printr-un cost care este funcție de durata totală a lucrărilor. Acesta va fi, de exemplu, „lipsa de cîștig", în cazul unei instalații industriale. În exemplul simplu al construcției unei vile, acest cost va fi pierderea pentru cumpărător cauzată de cheltuielile de hotel. Dacă putem estima sau calcula acest cost, $c = \varphi(t_n)$, soluția optimă, din punct de vedere economic, va fi cea corespunzătoare minimului funcției

$$\Gamma(t_n) = p(t_n) + \varphi(t_n),$$

unde $p(t_n)$ este costul de construcție considerat mai înainte.

Dacă $c = \varphi(t_n)$ are o formă simplă (dreaptă sau curbă convexă formată din segmente de drepte) putem calcula direct programul optimal printr-o simplă programare liniară.

Dacă $c = \varphi(t_n)$ are o formă mai puțin simplă, vom obține programul optimal printr-o rezolvare grafică, aducînd pe aceeași figură curba OA, locul soluțiilor optimale, obținută prin algoritmul lui Fulkerson, și curba $c = \varphi(t_n)$ (fig. 4.49).

Programul optimal este cel corespunzător punctului Ω din fig. 4.49. Durata totală a lucrărilor este atunci t_n^0.

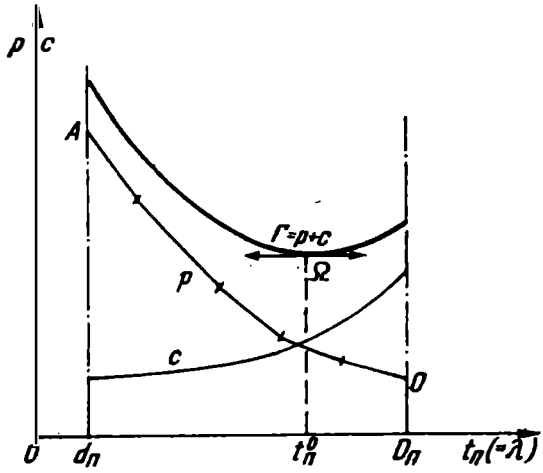


Fig. 4.49

4.11. OPTIMIZAREA UNUI PROGRAM CÎND DURATELE OPERAȚIILOR SÎNT ALEATOARE

Pînă în prezent ne-am situat în cazul în care pentru un cost dat, durata unei operații era bine determinată.

Vom presupune acum că timpii operatori sînt aleatori și că timpii operatori medii variază în funcție de costuri. Mărimile examinate la capitolul 2 : a_{ij}, m_{ij}, b_{ij}, t_{ij} și σ_{ij}^2 vor fi acum funcții de costurile p_{ij}.

Să punem

$$r_{1ij} = \frac{a_{ij}}{t_{ij}} \text{ și } r_{2ij} = \frac{b_{ij}}{t_{ij}} . \tag{4.46}$$

Să ne amintim că

a_{ij} este estimația optimistă a timpului operator;
b_{ij} este estimația pesimistă a timpului operator;
m_{ij} este estimația cea mai probabilă a timpului operator;

$t_{ij} = (\hat{t}_{ij})$ este timp operator mediu;
σ_{ij}^2 este dispersia.

Să presupunem că r_{1ij} și r_{2ij} sînt independente de t_{ij} și sînt constante pentru o activitate în care bugetul alocat variază.

Restricții anumite trebuie impuse lui r_{1ij} și r_{2ij}. Într-adevăr, este ușor de văzut, deoarece

$$t_{ij} = \frac{1}{6} (a_{ij} + 4\, m_{ij} + b_{ij}),$$

că

$$1{,}20 - 0{,}20\ \ r_{1ij} \leqslant r_{2ij} \leqslant 6 - 5\ \ r_{1ij} \tag{4.48}$$

sau

$$6 - 5\, r_{2ij} \leqslant r_{1ij} \leqslant 1{,}20 - 0{,}20\, r_{2ij}$$

și că

$$1{,}00 \geqslant r_{1ij} \geqslant 0. \tag{4.49}$$

Dispersia este

$$\sigma_{ij}^2 = \left[\frac{1}{6} (b_{ij} - a_{ij})\right]^2 = \frac{1}{36} (r_{2ij} - r_{1ij})^2\, t_{ij}^2. \tag{4.50}$$

Astfel, cînd datorită unei alocații suplimentare de credit, timpul operator mediu t_{ij} descrește, la fel se întîmplă și cu abaterea-tip σ_{ij}, iar coeficientul de variație rămîne constant și este egal cu

$$\frac{1}{6} (r_{2ij} - r_{1ij}).$$

Estimația cea mai probabilă m_{ij} este redusă de asemenea:

$$m_{ij} = \frac{1}{4} [6 - (r_{1ij} + r_{2ij})]\, t_{ij}. \tag{4.51}$$

Ipoteza, potrivit căreia dispersia timpului operator scade cu valoarea medie t_{ij}, cînd costul unei operații crește, adică cînd i se afectează un buget mai important, este întrutotul acceptabilă.

Să ilustrăm acest aspect de optimizare a unui program pe un exemplu simplu.

Figura 4.50 reprezintă graful unui anumit program. Să presupunem că variaţia costului unei operaţii în funcţie de durata sa medie t_{ij} este liniară, aşa cum am făcut la aplicarea algoritmului lui Fulkerson.

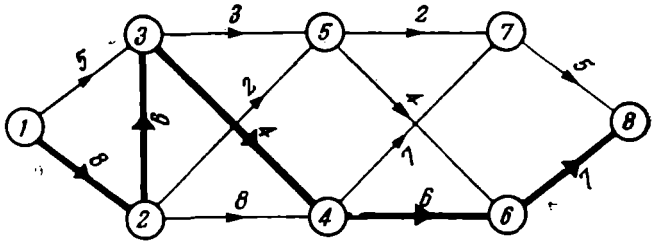


Fig. 4.50

Numerele plasate pe arcele grafului din fig. 4.50 corespund timpilor operatori medii D_{ij} ai programului normal.

Tabelul 4.13

Operaţia	D_{ij}	Cost normal	d_{ij}	cost max.	r_{1ij}	r_{2ij}
$P_{1,2}$	10,0	1 000	5,0	1 500	0,70	1,40
$P_{1,3}$	5,0	600	4,0	800	0,90	1,20
$P_{2,3}$	6,0	300	3,0	400	0,50	3,00
$P_{2,4}$	8,0	2 000	5,0	3 000	0,95	1,10
$P_{2,5}$	2,0	200	2,0	200	0,75	2,00
$P_{3,4}$	4,0	1 000	3,0	1 000	0,90	1,70
$P_{3,5}$	3,0	700	3,0	700		
$P_{4,6}$	6,0	800	5,0	1 200	0,60	2,50
$P_{4,7}$	7,0	200	6,0	200		
$P_{5,6}$	4,0	750	3,0	850		
$P_{5,7}$	2,0	50	1,0	50		
$P_{6,8}$	7,0	900	6,0	1 000	0,70	1,50
$P_{7,8}$	5,0	1 000	4,0	4 000		

În tabelul 4.14 s-au trecut costurile şi duratele medii ale diferitelor programe care corespund punctelor unghiulare ale curbei OA, locul soluţiilor optimale (fig. 4.51).

Tabelul 4.14

Programul nr.	Abatere	Durata medie (în săptămîni)	Cost (în F)	Durata proiectului la diferite praguri de siguranță			
				0,1	0,01	0,001	0,0001
0	3,5	33	95 000	37,7	41,2	43,9	46,0
1	3,5	32	95 000	36,7	40,2	42,9	45,0
2	3,2	31	95 334	35,3	38,5	41,0	42,9
3	3,1	26	100 334	30,1	33,1	35,5	37,3
4	3,0	25	101 334	29,0	32,0	34,3	36,2
5	2,5	23	108 667	26,4	28,9	30,8	32,3
6	2,3	22	112 667	25,3	27,3	29,1	30,4

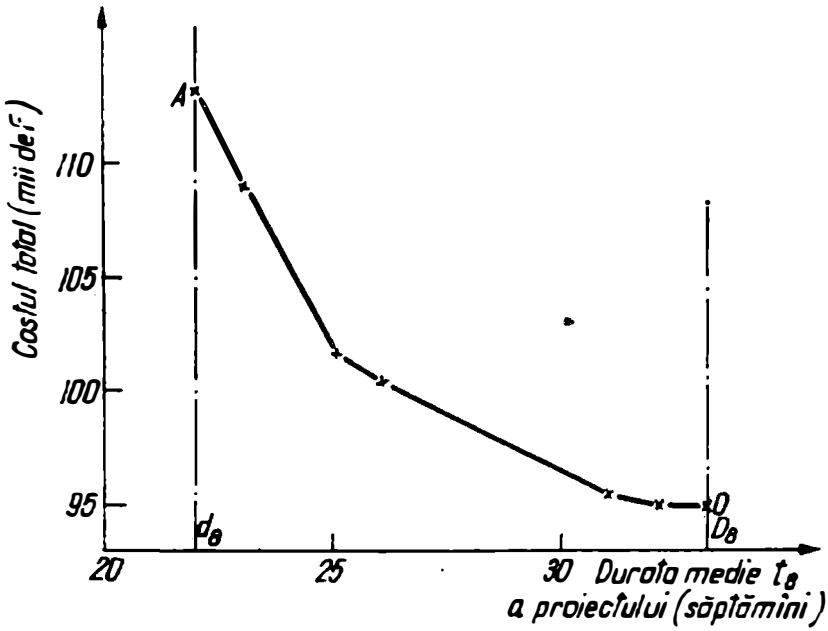


Fig. 4.51

Cele patru coloane din dreapta tabelului 4.14 indică datele pentru care probabilitățile de nerealizare a proiectului la aceste date sînt 0,1; 0,01; 0,001 și 0,0001. De exemplu, cu programul 0, probabilitatea ca timpul de realizare a proiectului să fie superior

lui 41,2 este 0.01. Altfel spus, există 99 de cazuri favorabile din 100 pentru ca proiectul să fie realizat într-un timp inferior sau egal cu 41,2 săptămîni.

Coloanele din dreapta tabelului 4.14 sînt utilizate în alegerea programului de întreprins. De exemplu, dacă dispunem de 32 săptămîni pentru a duce la bun sfîrşit proiectul şi dacă acest număr de 32 săptămîni este imperativ, se va alege programul 5 care oferă o siguranţă excelentă. Dimpotrivă, dacă 32 săptămîni nu este un număr obligatoriu, ci doar o indicaţie aproximativă, se va alege programul 1.

În concluzie, ideile dezvoltate în acest paragraf vor permite organizatorului să ţină seama, într-o anumită măsură, de riscurile datorate caracterului aleator al duratelor operaţiilor, în momentul alegerii programului de urmat.

CONCLUZII

Cu ocazia acestui studiu, unde au fost prezentate aspectele principale ale metodei PERT şi îmbunătăţirile sale recente, ar fi nimerit să se înfăţişeze căile de dezvoltare viitoare ale acestor metode.

Am introdus noţiunea de eveniment decizional într-un graf de program. Credem că aceasta este o primă schiţă pentru a se încerca introducerea conceptelor programării dinamice în stabilirea unui program. Am abordat apoi problema alocării optimale a resurselor bugetare între diferitele operaţii. În viitor, ar trebui să se examineze problemele afectării optimale în material şi mijloace umane între diferitele operaţii ale programului, ţinînd seama de restricţiile temporale şi tehnice şi aceasta pentru o cantitate dată în mijloace materiale şi în personal, căci problemele concrete se pun, cel mai des, în aceşti termeni.

Acestea sînt, după părerea noastră, căile pe care trebuie să se îndrepte cercetările pentru îmbunătăţirea metodelor de stabilire a programelor.

Credem, totuşi, că aplicarea metodei PERT, aşa cum a fost prezentată în această lucrare, va permite planificatorului de a aborda problemele care îl preocupă cu o precizie mai mare.

Cu ocazia unui voiaj în S.U.A. am putut constata că metoda drumului critic era folosită aproape peste tot, de la întreprinderi mijlocii pînă la întreprinderi foarte mari. În particular, proiectul Apollo care a permis oamenilor să pună piciorul pe Lună, proiectul cel mai formidabil din cîte au fost întreprinse vreodată şi ale cărei operaţii se numără cu zecile de mii, este organizat în întregime pornind de la metoda drumului critic, singura, după avizul specialiştilor N.A.S.A. şi ai North American Aviation Inc., care poate realiza coordonarea completă a activităţii a sute de mii de persoane, în sute de uzine, a situaţiilor sau a rezultatelor a nenumărate studii şi

experienţe, în sfîrşit, singura care permite un control eficace de către direcţiile de întreprinderi şi de administraţie.

În Franţa, metoda drumului critic este de asemenea din ce în ce mai folosită, şi pentru a convinge cititorul de aceasta am dori să-l trimitem la o lucrare *) care dă o privire sugestivă a importanţei acestei metode. Cele două exemple pe care le-am dat în 2.6, sînt de altfel articole condensate, prezentate în această lucrare, a cărei lectură va fi extrem de utilă pentru cei care doresc să treacă la aplicaţii efective. Iată diferitele capitole ale acestei cărţi şi numele autorilor :

— Fizionomia şi tratarea problemelor de ordonanţare (Physionomie et traitement des problèmes d'ordonnancement) de B. Roy.

— Cercetarea operaţională în construcţii (Recherche opérationnelle dans le bâtiment) de P. Pacaud.

— Ordonanţarea operaţiilor şi personalului în utilizarea unui tunel-cofraj (Ordonnancement des opérations et du personnel dans l'utilisation d'un coffrage-tunnel) de J. de Rosinski.

— Ordonanţarea lucrărilor de întreţinere într-o rafinărie (Ordonnacement des travaux d'entretien dans une raffinerie) de D. Carré.

— Ordonanţarea operaţiilor de armament la şantierele Atlanticului (Ordonnancement des opérations d'armement aux Chantiers de l'Atlantique).

— Contribuţia teoriei grafurilor la studiul problemelor de ordonanţare (Contribution de la théorie des graphes à l'étude des problèmes d'ordonnancement) de B. Roy.

— Utilizarea metodei FLPL în rezolvarea unei probleme de ordonanţare (Utilisation de F.L.P.L. dans la résolution d'un probleme d'ordonnancement) de P. Darnaut şi G. Sandier.

— Problemele de ordonanţare cu restricţii disjunctive (Les problèmes d'ordonnancement avec contraintes disjonctives) de Ph. Tuan Nghiem.

Metoda drumului critic favorizează realizarea exactităţii, a clarviziunii şi de asemenea a îndrăznelii; este un frumos exemplu de aplicare a matematicii în organizare.

*) Les Problèmes d'ordonnancement, SoFRO, Dunod, 1964.

ANEXE

I

REPARTIȚIA β

Repartiția β este o repartiție referitoare la o variabilă aleatoare t cuprinsă în intervalul $[A, B]$ unde $A > 0$ și $B > 0$, și a cărei densitate de probabilitate este

$$f(t) = 0, \quad -\infty < t < A$$

$$= \frac{(t-A)^{\alpha}(B-t)^{\gamma}}{(B-A)^{\alpha+\gamma+1}\,\beta(\alpha+1, \gamma+1)}, \quad A \leqslant t \leqslant B, \tag{I.1}$$

$$= 0, \quad B < t < \infty,$$

unde

$$\beta(m, n) = \int_0^1 x^{m-1} \cdot (1-x)^{n-1}\,\mathrm{d}x = \frac{\Gamma(m)\cdot\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} \tag{I.2}$$

este funcția lui Euler de prima speță și

$$\Gamma(r) = \int_0^{\infty} x^{r-1}\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \tag{I.3}$$

este funcția lui Euler de speța a doua.

Figura I.1 dă aspectul acestei repartiții pentru valori date ale parametrilor.

Se consideră de asemenea repartiția β standardizată prin relația

$$t = A + (B-A)u, \tag{I.4}$$

ceea ce dă după transformare

$$\varphi(u) = 0, \quad -\infty < u < 1,$$

$$= \frac{u^{\alpha}(1-u)^{\gamma}}{\beta(\alpha+1, \gamma+1)}, \quad 0 \leqslant u \leqslant 1, \tag{I.5}$$

$$= 0, \quad 1 < u < \infty.$$

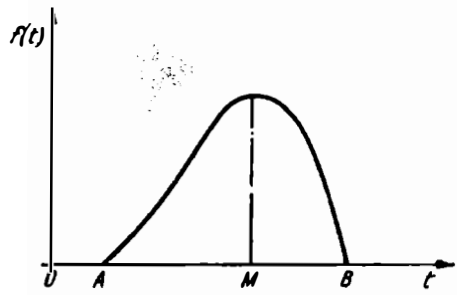


Fig. I.1

Pentru repartiția β standardizată avem

$$\bar{u} = E(u) = \frac{\alpha+1}{\alpha+\gamma+2} \tag{I.6}$$

și

$$\sigma_u^2 = \frac{(\alpha+1)(\gamma+1)}{(\alpha+\gamma+3)(\alpha+\gamma+2)^2} \tag{I.7}$$

și pentru repartiția β nestandardizată

$$\bar{t} = E(i) = A + (B-A) \cdot \frac{\alpha+1}{\alpha+\gamma+2} \tag{I.8}$$

și

$$\sigma_T^2 = \frac{(B-A)^2(\alpha+1)(\gamma+1)}{(\alpha+\gamma+3)(\alpha+\gamma+2)^2}. \tag{I.9}$$

Pe de altă parte, moda acestei ultime funcții corespunzătoare lui $f'(t) = 0$ are ca valoare

$$M = \frac{A\gamma + B\alpha}{\alpha + \gamma}, \tag{I.10}$$

ceea ce permite să-l scriem pe t în felul următor:

$$\bar{t} = E(t) = \frac{A + B + (\alpha + \gamma) M}{\alpha + \gamma + 2}. \tag{I.11}$$

În metoda PERT s-a ales:

$$\alpha = 2 + \sqrt{2}, \tag{I.12}$$

$$\gamma = 2 - \sqrt{2} \tag{I.13}$$

sau

$$\alpha = 2 - \sqrt{2}, \tag{I.14}$$

$$\gamma = 2 + \sqrt{2}. \tag{I.15}$$

Acestea dau

$$\bar{t} = E(t) = \frac{A + B + (\alpha + \gamma) M}{\alpha + \gamma + 2} = \frac{A + B + 4M}{6}, \tag{I.16}$$

$$\sigma_T^2 = \frac{(B - A)^2 (\alpha + 1) (\gamma + 1)}{(\alpha + \gamma + 3) (\alpha + \gamma + 2)^2} = \frac{(B - A)^2}{36} = \left(\frac{B - A}{6}\right)^2. \tag{I.17}$$

Se admite deci pentru $\bar{t}$ o valoare aproximativă dacă

$$M \neq \frac{(2 - \sqrt{2}) A + (2 + \sqrt{2}) B}{4} \tag{I.18}$$

sau dacă

$$M \neq \frac{(2 + \sqrt{2}) A + (2 - \sqrt{2}) B}{4}. \tag{I.19}$$

II

VALOAREA MEDIE A UNUI DRUM CRITIC ÎNTR-UN GRAF DE PROGRAM*

În această anexă, propunem o metodă de aproximare a valorii medii a unui drum critic într-un graf de program, în care valorile arcelor sînt variabile aleatoare.

După cum am văzut, de obicei se înlocuieşte fiecare repartiţie prin media sa şi astfel ne găsim în faţa unei probleme deterministe. Această estimaţie este întodeauna optimistă:

$$g \leqslant e. \tag{II.1}$$

Vom descrie un mijloc de a calcula o aproximaţie mai bună f astfel încît

$$g \leqslant f \leqslant e. \tag{II.2}$$

II.1. IPOTEZE ŞI NOTAŢII

Vîrfurile grafului sînt numerotate $1,2,\ldots,n$ astfel încît, dacă există un arc de la vîrful i la vîrful j, atunci $i < j$ (fig. II.1). Arcele sînt numerotate (1), (2),..., (m).

$\mathbf{U}_i^-$ reprezintă mulţimea (sau fasciculul) de arce incidente în vîrful i către interior (fig. II.2).

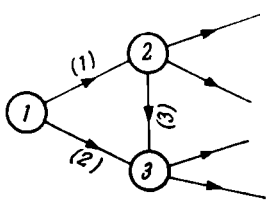


Fig. II.1

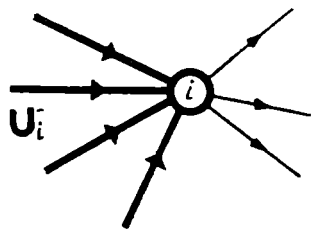


Fig. II.2

*) Această expunere este extrasă din [9].

Pe graful din fig. II. 1 avem

$$\mathbf{U}_1^- = \varnothing,\ \mathbf{U}_2^- = \{(1)\},\ \mathbf{U}_3^- = \{(2),\ (3)\} \text{ etc.}$$

În acelaşi fascicul repartiţiile valorilor arcelor pot fi independente, dar se va presupune că repartiţiile diferitelor fascicule sînt independente.

Dacă $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ sînt arcele fasciculului $\mathbf{U}_i^-$ (fig. II.3), lui

$$\mathbf{U}_i^- = \{\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_k\} \tag{II.3}$$

îi corespunde

$$t_{\mathbf{U}_i^-} = (t_{\alpha_1}, \ldots, t_{\alpha_k}), \tag{II.4}$$

unde t_{α_k} este valoarea aleatoare a arcului α_k, adică, mai precis, durata aleatoare a operaţiei reprezentate prin arcul

$$p\,(t_{\mathbf{U}_i^-}) \tag{II.5}$$

este repartiţia *vectorului timp operator* $t_{\mathbf{U}_i^-}$.

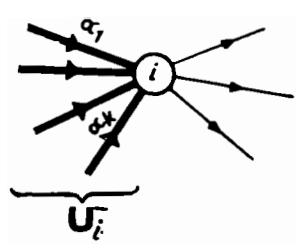


Fig. II.3

Pentru anumite valori

$$t = (t_1, t_2, \ldots, t_m) \tag{II.6}$$

ale arcelor grafului

$$p\,(t) = p\,(t_{\mathbf{U}_1^-})\ p\,(t_{\mathbf{U}_2^-}) \ldots p\,(t_{\mathbf{U}_n^-}). \tag{II.7}$$

este probabilitatea unui astfel de aranjament şi

$$l_i\,(t) \tag{II.8}$$

reprezintă valoarea*) unui drum critic de la vîrful 1 la vîrful i, fiind date valorile de deasupra arcelor. Atunci

$$e_i = \sum_t p\,(t)\ l_i\,(t) \tag{II.9}$$

*) Vorbim de valoarea unui arc sau a unui drum mai curînd decît despre lungimea sa. De fapt, în teoria grafurilor, lungimea unui drum este numărul de arce care constituie acest drum şi lungimea unui arc este, prin definiţie, egală cu 1. Aici valoarea unui arc înseamnă timpul operator.

este valoare medie a drumului critic mergînd de la vîrful 1 la vîrful i. Dar valoarea $l_i\ (t)$ nu depinde de valorile arcelor fasciculelor

$$\mathbf{U}_{i+1}^{-}, \ldots, \mathbf{U}_{n}^{-},$$

pentru că nici un drum de la 1 la i nu utilizează vreunul din arcele

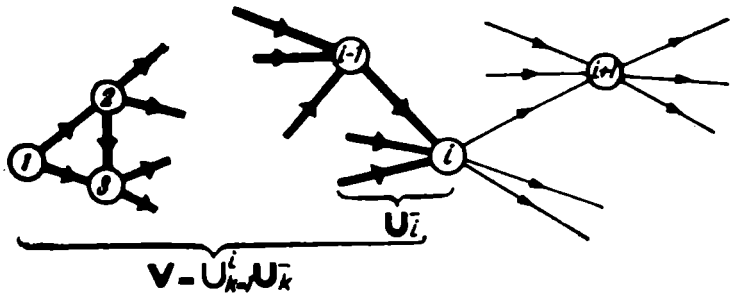


Fig. II.9

lor. Dacă se notează $\mathbf{V}$ reuniunea mulţimilor $\mathbf{U}_1^-$, $\mathbf{U}_2^-$, ..., $\mathbf{U}_i^-$ (fig. II.4)

$$\mathbf{V} = \bigcup_{k=1}^{i} \mathbf{U}_k^-, \tag{II.10}$$

şi (II.9) se poate scrie sub forma

$$e_i = \sum_{t_\mathbf{V}} p\,(t_\mathbf{V})\; l_i\,(t_\mathbf{V}), \tag{II.11}$$

unde

$$p\,(t_\mathbf{V}) = P\,(t_{\mathbf{U}_1^-}) \cdot p\ (t_{\mathbf{U}_2^-}) \ldots p\,(t_{\mathbf{U}_i^-}). \tag{II.12}$$

Dacă $t_{\alpha k}$ este valoarea aleatoare a arcului α_k al fasciculului $\mathbf{U}_i^-$ (fig. II.3),

$$\alpha_k \in \mathbf{U}_i^-, \tag{II.13}$$

iar valoarea medie a arcului α_k este

$$\bar{t}_{\alpha k} = \sum_{t_\mathbf{U}} p\,(t_{\mathbf{U}_1^-})\; t_{\alpha k}\,. \tag{II.14}$$

În 2.7 s-a calculat o aproximare a valorii medii a drumului critic de la vîrful 1 la vîrful i prin :

$$\begin{aligned} g_1 &= 0, \\ &\cdots\cdots \\ g_i &= \max (g_1 + \bar{t}_1, \ldots ; g_{i-1} + \bar{t}_{i-1}). \end{aligned} \tag{II.15}$$

Aici presupunem pentru a simplifica notațiile, că mulțimea U_i^- constă din arce care pleacă din vîrfurile $1,2,\ldots, i-1$ și incidente în i către interior, și că aceste arce sînt numerotate $1, 2,\ldots, i-1$ respectiv (fig. II.5). Dacă arcul k nu există, nu se ține seama de

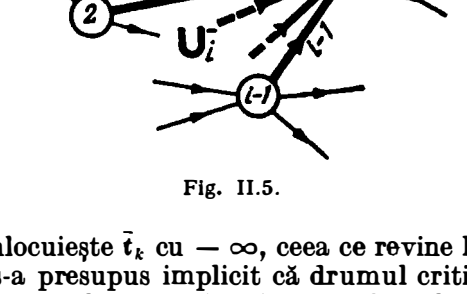


Fig. II.5.

$g_k + \bar{t}_k$, sau se înlocuiește $\bar{t}_k$ cu $-\infty$, ceea ce revine la același lucru. În acest calcul s-a presupus implicit că drumul critic nu se schimbă (este constituit din aceleași arce), oricare ar fi valorile aleatoare ale arcelor grafului.

II.2. APROXIMAȚIA f_i A VALORII UNUI DRUM CRITIC

Vom descrie acum un calcul analog cu (II.15), dar puțin mai complex, care permite o aproximație mai bună a valorii medii a drumurilor critice.

Să definim f_i prin :

$$\begin{aligned} f_1 &= 0 \\ &\cdots\cdots \\ f_i &= \sum_{t_{U_i^-}} p(t_{U_i^-}) \max (f_1 + t_1, \ldots, f_{i-1} + t_{i-1}) \qquad i = 1, 2, \ldots n, \end{aligned} \tag{II.16}$$

unde ca în (II.15)

$$t_{U_i^-} = (t_1, t_2, \ldots, t_{i-1}),$$

$p\ (t_{U_i^-})$ fiind repartiția vectorului timp operator $t_{U_i^-}$.

Să ilustrăm formulele (II.15) și (II.16) printr-un exemplu numeric. Fie graful din fig. II.6 și să presupunem că valorile fiecărui arc sînt 0 și 1, fiecare cu probabilitatea egală cu 1/2.

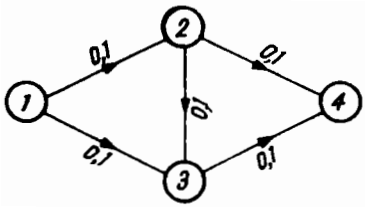


Fig. II.6

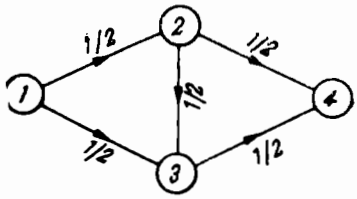


Fig. II.7

Să aplicăm formula (II.15). Se obține (fig. II.7)

$$g_1 = 0$$

$$g_2 = \frac{1}{2}$$

$$g_3 = 1$$

$$g_4 = \frac{3}{2}$$

Aplicînd formula (II.16), avem

$$f_1 = 0.$$

$$f_2 = \frac{1}{2}(f_1 + 0) + \frac{1}{2}(f_1 + 1) = \frac{1}{2},$$

$$f_3 = \frac{1}{4}\max(f_1 + 0, f_2 + 0) + \frac{1}{4}\max(f_1 + 0, f_2 + 1) +$$

$$+ \frac{1}{4}\max(f_1 + 1,\ f_2 + 0) + \frac{1}{4}\max(f_1 + 1,\ f_2 + 1) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2} + 1 + \frac{3}{2}\right) = \frac{9}{8},$$

$$f_4 = \frac{1}{4}\max(f_2 + 0, f_3 + 0) + \frac{1}{4}\max(f_2 + 0, f_3 + 1) +$$

$$+ \frac{1}{4}\max(f_2 + 1,\ f_3 + 0) + \frac{1}{4}\max(f_2 + 1, f_3 + 1) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{9}{8} + \frac{17}{8} + \frac{3}{2} + \frac{17}{8}\right) = \frac{55}{32}.$$

Se observă că $g_4 < f_4$.

Să arătăm că, în general, într-un graf PERT inegalitățile

$$g_i \leqslant f_i \leqslant l_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

sînt satisfăcute.

Vom aplica metoda recurenței. Să arătăm mai întîi că

$$g_{i+1} \leqslant f_{i+1}. \tag{II.18}$$

Punînd

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}_{i+1}^{-} = \{1, 2, \ldots, i\} \tag{II.19}$$

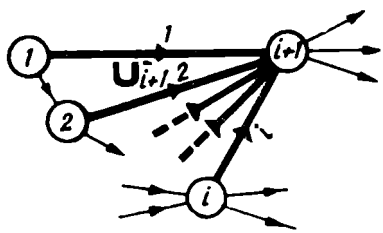


Fig. II.8

avem (fig. II. 8)

$$f_{i+1} = \sum_{i_{\mathbf{U}}} p(t_{\mathbf{U}}) \max(f_1 + t_1, \ldots, f_i + t_i) \tag{II.20}$$

sau

$$f_{i+1} = \sum_{i_{\mathbf{U}}} \max[p(t_{\mathbf{U}})(f_1 + t_1), \ldots, p(t_{\mathbf{U}})(f_i + t_i)], \tag{II.21}$$

$$f_{i+1} \geqslant \max[\sum_{i_{\mathbf{U}}} p(t_{\mathbf{U}})(f_1 + t_1), \ldots, \sum_{i_{\mathbf{U}}} p(t_{\mathbf{U}})(f_i + t_i)]. \tag{II.22}$$

Deoarece $f_1, \ldots, f_i$ nu depind de $t_{\mathbf{U}}$:

$$f_{i+1} \geqslant \max\,(f_1 + \bar{t}_1, \ldots, f_i + \bar{t}_i). \tag{II.23}$$

Inegalitatea (II.18) fiind adevărată pentru $1, \ldots, i$, avem

$$f_{i+1} \geqslant \max\,(g_1 + \bar{t}_1, \ldots, g_i + \bar{t}_i) = g_{i+1} \tag{II.24}$$

după (II.15), ceea ce demonstrează relaţia (II.18).

Să arătăm acum că

$$e_{i+1} \geqslant f_{i+1}. \tag{II.25}$$

Pentru aceasta să punem

$$\mathbf{V} = \bigcup_{k=1}^{i} \mathbf{U}_k^-, \quad \mathbf{W} = \bigcup_{k=1}^{i+1} \mathbf{U}_k^-, \quad \text{şi} \quad \mathbf{U} = \mathbf{U}_{i+1}^- = \{1,2, \ldots, i\} \tag{II.26}$$

(a se vedea figurile II.4, II.8 şi II.9).

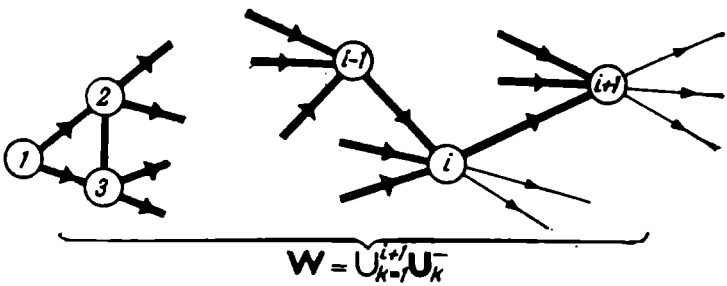


Fig. II.4

Din expresiile (II.11) şi (II.12) şi din relaţia

$$l_{i+1}(t_{\mathbf{W}}) = \max\,[l_1(t_{\mathbf{V}}) + t_1, \ldots, l_i(t_{\mathbf{V}}) + t_i] \tag{II.27}$$

se obţine

$$e_{i+1} = \sum_{t_{\mathbf{W}}} p(t_{\mathbf{W}})\, l_{i+1}(t_{\mathbf{W}}) =$$

$$= \sum_{t_{\mathbf{U}}} p(t_{\mathbf{U}}) \sum_{t_{\mathbf{V}}} p(t_{\mathbf{V}})\, \max\,[l_1(t_{\mathbf{V}}) + t_1, \ldots, l_i(t_{\mathbf{V}}) + t_i] \tag{II.28}$$

sau

$$e_{i+1} = \sum_{t_U} p(t_U) \sum_{t_V} \max \{p(t_V)\,[l_1(t_V) + t_1], \ldots, p(t_V)\,[l_i(t_V) + t_i]\}. \tag{II.29}$$

Rezultă că

$$e_{i+1} \geqslant \sum_{t_U} p(t_U) \max \left\{ \sum_{t_V} p(t_V)\,[l_1(t_V) + t_1], \ldots \right. \\ \left. \ldots, \sum_{t_V} p(t_V)\,[l_i(t_V) + t_i] \right\}. \tag{II.30}$$

Folosind din nou (II.11), obţinem

$$e_{i+1} \geqslant \sum_{t_U} p(t_U) \max [e_1 + t_1, \ldots, e_i + t_i]. \tag{II.31}$$

Inegalitatea (II.25) fiind adevărată pînă la i şi folosind (II.16), avem

$$e_{i+1} \geqslant \sum_{t_U} p(t_U) \max [f_1 + t_1, \ldots, f_i + t_i] = f_{i+1}. \tag{II.32}$$

Această relaţie verifică (II.25) şi demonstrează (II.17).

Trebuie să observăm că inegalităţile $g_i \leqslant l_i$, sînt valabile fie că fasciculele sînt independente sau nu. Dimpotrivă, ipoteza de independenţă între fascicule este esenţială pentru (II.17).

II.3. CÎTEVA EXEMPLE NUMERICE

În acest paragraf prezentăm cîteva exemple numerice pentru a compara pe g_n, f_n şi e_n. În fiecare dintre aceste exemple am presupus aceeaşi repartiţie uniformă pentru fiecare arc şi independenţa între arce.

Numerele situate pe arce sînt valorile pe care le poate lua timpul operator corespunzător. Pentru exemplele 2 şi 3, calculele au fost efectuate de un calculator electronic.

Exemplul 1 (fig. II.10)

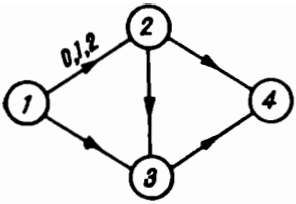


Fig. II.10

$g_4 = 3{,}00, \quad f_4 = 3{,}22, \quad e_4 = 3.32.$

Distribuţia valorilor drumului critic

l_4	0	1	2	3	4	5	6
Frecvenţa	1	11	50	74	71	27	9

Exemplul 2 (fig. II.11)

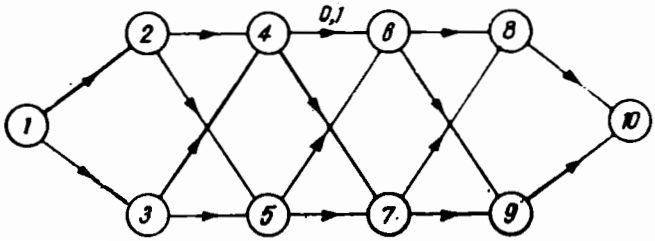


Fig. II.11

$g_{10} = 2{,}50, \quad f_{10} = 3{,}50, \quad e_{10} = 3{,}95.$

Exemplul 3 (fig. II.12)

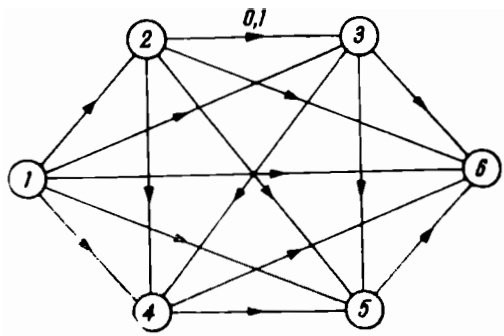


Fig. II.12

$g_6 = 2{,}50, \quad f_6 = 2{,}92, \quad e_6 = 2{,}95.$

Din aceste trei exemple se constată că aproximaţia f este mai bună decît aproximaţia g.

III

SUBDIVIZIUNEA OPERAȚIILOR ȘI REALIZAREA UNUI CALENDAR*)

În această anexă vom înfățișa efectele subdiviziunii operațiilor asupra probabilității de realizare a unui calendar prestabilit. Mai precis, problema tratată în această anexă este următoarea:

Fiind dată o activitate sau un șir de activități care se termină cu un eveniment cu o dată fixată, să se determine efectul subdiviziunii unei activități (sau a mai multora) asupra probabilității calculate de realizare a evenimentului la data indicată.

Se presupune că o operație, pentru care s-au stabilit estimațiile optimistă, cea mai probabilă și pesimistă ale timpului operator, a, m și b, respectiv, este divizată în n subactivități, conectate în serie, cu estimațiile optimistă, cea mai probabilă și pesimistă a_i, m_i și b_i ale timpului operator, unde $i = 1,2,\ldots,n$.

Se mai presupune că

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a, \qquad \sum_{i=1}^{n} b_i = b, \qquad \sum_{i=1}^{n} m_i = m \tag{III.1}$$

și că timpii operatori ai subactivităților sînt variabile aleatoare independente:

$$d = \sum_{i=1}^{n} d_i,$$

unde

$$d = b - a \text{ și } d_i = b_i - a_i, \quad i = 1,\ldots,n.$$

Utilizînd ecuațiile repartiției β, referitoare la valoarea medie și la dispersia timpului operator, avem pentru activitatea originală,

*) Această expunere este extrasă din articolul [10].

înaintea subdiviziunii :

$$E(t) = \frac{1}{6}(a + 4m + b), \tag{III.3a}$$

$$V(t) = \left[\frac{1}{6}(b - a)\right]^2 = d^2/36. \tag{III.3b}$$

După subdiviziune, avem :

$$E_n(t) = \sum_{i=1}^{n} E(t_i) = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{n}(a_i + 4m_i + b_i) =$$

$$= \frac{1}{6}(a + 4m + b), \tag{III.4a}$$

$$V_n(t) = \sum_{i=1}^{n} V(t_i) = \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{6}(b - a_i)\right]^2 = \frac{1}{36}\sum_{i=1}^{n} d_i^2. \tag{III.4b}$$

Se vede că

$$E(t) = E_n(t).$$

Ecuația (III.3b) se poate scrie

$$V(t) = \frac{1}{36}d^2 = \frac{1}{36}\left(\sum_{i=1}^{n} d_i\right)^2 = \frac{1}{36}\left(\sum_{i=1}^{n} d_i^2 + \sum_{i\neq j}\sum d_i d_j\right). \tag{III.5}$$

Deoarece $d_i \geqslant 0$ pentru orice i, o comparație între (III.4b) și (III.5) arată că

$$V(t) \geqslant V_n(t). \tag{III.6a}$$

Neconsiderînd decît cazurile de nedegenerare, scriem

$$V(t) > V_n(t). \tag{III.6b}$$

În metoda PERT probabilitatea de realizare a unui eveniment înainte de (sau la) data fixată în calendarul T_s se obține calculînd

$$y = \frac{T_S - E(T)}{\sqrt{V(T)}}, \tag{III.7a}$$

unde $E(T)$ și $V(T)$ sînt respectiv valoarea medie și dispersia datei evenimentului luate din tabela legii normale (Gauss-Laplace) reduse.

În această anexă, t reprezintă timpul operator al unei operații și T este data de realizare efectivă a unui eveniment, T_s fiind data prevăzută în calendar,

$$P(T \leqslant T_S) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{1}{2}z^2} \, dz. \tag{III.7b}$$

Să presupunem acum că activitatea care a fost divizată se găsește pe drumul folosit pentru calcularea lui $E(T)$ și $V(T)$. Putem presupune de altfel că activitatea sudivizată este prima. Dacă $V(t)$ este dispersia timpului operator al primei operații, înaintea subdiviziunii, și σ^2 este suma dispersiilor corespunzătoare operațiilor următoare pe acest drum, atunci dispersia datei evenimentului este

$$V(T) = V(t) + \sigma^2. \tag{III.8}$$

Din ecuațiile (III, 7 a) și (III.8) se obține

$$y = \frac{T_S - E(t)}{\sqrt{V(t) + \sigma^2}} \tag{III.9a}$$

înainte de subdiviziunea primei activități și

$$y_n = \frac{T_S - E(t)}{\sqrt{V_n(t) + \sigma^2}} \tag{III.9b}$$

după subdiviziune.

Din ecuațiile (III.6b) și (III.9) se deduce:

$$|y_n| > |y| \tag{III.10}$$

și sînt posibile trei cazuri:

— pentru $T_S > E(T)$, probabilitatea de a îndeplini evenimentul înainte de (sau la) data calendarului va crește;

— pentru $T_S < E(T)$, probabilitatea va scădea;

— pentru $T_S = E(T)$, această probabilitate nu se va schimba.

Ecuațiile (III.7) arată că probabilitatea poate fi afectată prin schimbările lui T_S, $E(T)$ sau $V(T)$.

Să considerăm, mai întîi, numai schimbările lui $V(T)$ și mai precis, schimbarea lui $V(T)$ rezultînd din subdiviziunea primei operații. Dispersia timpului operator, după subdiviziune, este

$$V_n(t) = \frac{1}{36} \sum_{i=1}^{n} d_i^2.$$

Suma se poate scrie

$$\sum_{i=1}^{n} d_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i\, d)^2 = d^2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2, \tag{III.11}$$

cu $0 < x_i < 1$ pentru toți i și

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1. \tag{III.12}$$

Derivînd și utilizînd metoda lui Lagrange, se vede ușor că pentru o diviziune în n subactivități, $x_i = \frac{1}{n}$, $i = 1,2,\ldots,n$, minimizează expresia (III.11) supusă la (III.12). Atunci

$$\min V_n(t) = \frac{1}{36} d^2 \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{n}\right)^2 = \frac{1}{36} \frac{d^2}{n}.$$

Pentru a găsi maximul dispersiei, pentru o diviziune în n subactivități, se presupune că diferențele $b-a$ pentru operația originală

și pentru subactivități au valori întregi. Această restricție nu pare prea severă cînd unitatea de timp este săptămîna sau ziua. Această diferență fiind d înaintea subdiviziunii, se divizează operația în două subactivități pentru care diferențele $b_i - a_i$ sînt respectiv $d-1$ și 1. Considerînd curba $f(x) = x^2$, este clar că acestei subdiviziuni particulare îi corespunde dispersia cea mai mare. De asemenea, subdiviziunii în trei activități, pentru care diferențele $b_i - a_i$ sînt respectiv $d - 2$, 1 și 1, îi corespunde cea mai mare dispersie. Continuînd cu acest argument euristic, se ajunge la concluzia că dispersia maximală, pentru o diviziune în n subactivități este

$$\max V_n(t) = \frac{1}{36}[(d - n + 1)^2 + (n - 1)] =$$

$$= \frac{1}{36}[d^2 + (2d - n)(n - 1)] \qquad \text{(III.14)}$$

cu restricția implicită $n \leqslant d$, care nu pare prea severă.

Ecuațiile (III.13) și (III.14) dau deci marginile inferioară și superioară pentru dispersia $V_n(t)$ a unei diviziuni în n subactivități:

$$\frac{1}{36}\frac{d^2}{n} \leqslant V_n(t) \leqslant \frac{1}{36}[d^2 - (2d - n)(n - 1)]. \qquad \text{(III.15)}$$

Marginile lui $V_n(t)/V(t)$ sînt

$$\frac{1}{n} \leqslant \frac{V_n(t)}{V(t)} \leqslant 1 - \frac{(2d - n)(n - 1)}{d^2}. \qquad \text{(III.16)}$$

Fig. III. 1 dă reprezentarea ecuației (III.16) pentru diferite valori ale lui d și n.

Să ilustrăm efectul subdiviziunii unei activități (sau a mai multora) prin exemplul următor:

a) Să presupunem că într-un graf de program există 100 activități, fiecare cu o dispersie a timpului operator de 6,25 (adică $d = 15$), pe drumul critic ducînd la obiectivul final și că

$$T_S - E(T) = -13.$$

Atunci pentru $V(T) = 625$, se deduce din ecuația (III.7) :

$$P(T \leqslant T_S) = 0{,}30.$$

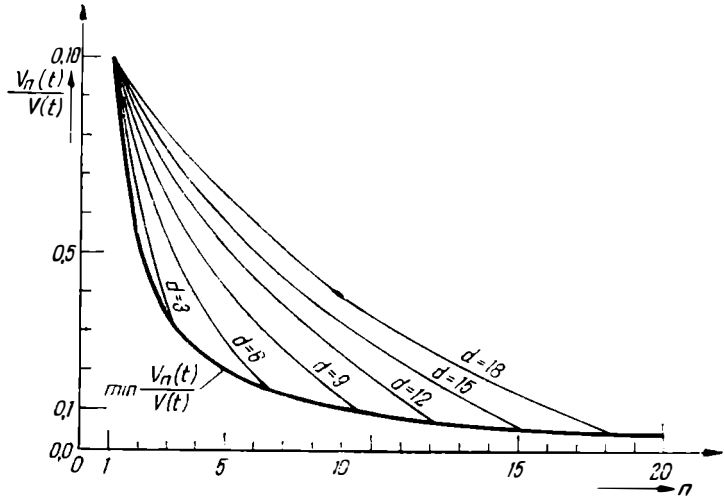


Fig. III.1

b) Să presupunem acum că : 1) fiecare din cele 100 operații este subdivizată în trei subactivități, răspunzînd condițiilor (III.1), ceea ce dă un total de 300 activități pe drumul critic și 2) T_S și $E(T)$ rămîn neschimbate ; atunci se deduce din ecuația (III.16) :

$$208{,}125 \leqslant V_3(T) \leqslant 475$$

și din ecuația (III.7) :

$$0{,}18 \leqslant P(T \leqslant T_S) \leqslant 0{,}27.$$

c) Dacă operațiile sînt subdivizate în șase subactivități, avem

$$104{,}375 \leqslant V_6(T) \leqslant 291{,}875$$

și

$$0{,}10 \leqslant P(T \leqslant T_S) \leqslant 0{,}22.$$

Dacă în exemplul precedent data fixată în calendar T_S era posterioară datei așteptate, de exemplu, $T_S - E(T) = +13$, atunci, din cauza simetriei repartiției normale, probabilitățile corespunzătoare ar fi fost

$$\text{a')}\ P(T \leqslant T_S) = 0,70;$$

$$\text{b')}\ 0,73 \leqslant P(T \leqslant T_S) \leqslant 0,82;$$

$$\text{c')}\ 0,78 \leqslant P(T \leqslant T_S) \leqslant 0,90.$$

Efectele subdiviziunii activităților pot fi ilustrate căutînd, cînd $V(T)$ se schimbă, noua dată T_S, astfel încît probabilitatea de realizare să rămînă neschimbată. Se presupune atunci că $E(T)$ este fixată și se permite variația lui T_S. Probabilitatea de realizare a unui eveniment înainte de (sau la) data fixată în calendar este

$$P = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{(T_S - T_E)/\sigma} e^{-\frac{1}{2}z^2}\, dz, \qquad \text{(III.17)}$$

unde $T_E = E(T)$ și $\sigma = \sqrt{V(T)}$ este abaterea tip.

Să diferențiem:

$$dP = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{(T_S - T_E)^2}{\sigma^2}\right\}\left[\Delta T_S - \frac{\Delta\sigma(T_S - T_E)}{\sigma}\right]. \qquad \text{(III.18)}$$

Scriind că $dP = 0$ în ecuația (III.18), se obține

$$\Delta T_S = (T_S - T_E)\frac{\Delta\sigma}{\sigma}. \qquad \text{(III.19)}$$

Pentru a ilustra schimbarea efectuată asupra lui T_S, să reluăm exemplul precedent:

a) Dacă fiecare din cele 100 de operații este subdivizată în trei subactivități,

$$-10,57 \leqslant \Delta\sigma \leqslant -3,21$$

și ecuația (III.19) dă

$$1{,}67 \leqslant \Delta T_S \leqslant 5{,}50.$$

Astfel, data ce figurează în calendar va putea fi deplasată cel puțin cu 1,67 și cel mult cu 5,50 unități de timp, menținînd

$$P(T \leqslant T_S) = 0{,}30.$$

(b) Dacă fiecare din cele 100 activități este subdivizată în șase subactivități, atunci

$$-13{,}82 \leqslant \Delta\sigma \leqslant -6{,}36$$

și

$$3{,}31 \leqslant \Delta T_S \leqslant 7{,}19.$$

Astfel, data fixată în calendar va putea fi deplasată cel puțin cu 3,31 și cel mult cu 7,19 unități de timp, menținînd

$$P(T \leqslant T_S) = 0{,}30.$$

În sfîrșit, diferențiala totală a expresiei (III.17) este

$$\mathrm{d}P = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{(T_S - T_E)^2}{\sigma^2}\right\}\left[\Delta T_S - \Delta T_E - (T_S - T_E)\frac{\Delta\sigma}{\sigma}\right]. \tag{III.20}$$

Această ecuație (III.20) poate fi utilizată pentru evaluarea efectului asupra probabilității calculate de realizare a schimbărilor uneia (sau a mai multora) dintre cantitățile T_S, T_E și σ.

IV

APLICAREA METODEI POTENȚIALELOR*)

În această anexă vom relua exemplul lui Pacaud, expus în 2.6, tratîndu-l cu ajutorul sistemului de reprezentare prin sarcini și restricții, ceea ce ne va da ocazia să expunem algoritmul lui B. Roy, prezentat în articolul [12].

Ca punct de plecare se va utiliza tabelul IV.1, unde în coloanele 1, 2, 3, 4, 5 și 6 a fost condensată toată informația disponibilă asupra sarcinilor necesare pentru a duce la bun sfîrșit proiectul; coloanele 7, 8 și 9 indică rezultatele obținute prin aplicarea algoritmului.

Cititorul va observa că datele disponibile se referă la două aspecte — ordinea logică de succesiune a operațiilor (sarcinilor) și duratele acestora — pe care metodele de programare expuse în această carte permit să fie considerate independent unul de celălalt. Lucrînd cu toată rigoarea nu este totuși necesar să desenăm graful programului pentru a determina drumul critic; s-a dovedit însă util să facem acest lucru pentru a da o imagine vizuală proiectului (interdependențe existente, ...). Cititorul își va aminti că în metoda PERT existența posibilă a operațiilor virtuale obligă, dimpotrivă, să trasăm graful înaintea începerii calculelor.

Figura IV.1 reprezintă graful corespunzător exemplului tratat; este util să subliniem că restricțiile existente în acest program sînt astfel încît valorile afectate arcelor corespund duratelor sarcinilor, adică un arc unind vîrful i cu vîrful j sau cu vîrful m,... are ca valoare durata sarcinii i; aceste restricții constituie un tip particular a aceea ce B. Roy numește restricții „potențiale" **) care pot fi toate reprezentate prin sistemul sarcini-restricții.

---

*) Textul din această anexă, introdus în ediția spaniolă a acestei lucrări, se datorează lui R. Companys, M. Marti și J. M. Vegara.

**) *Les Problèmes d'ordonnancement*, AFIRO, DUNOD, 1964, pag. 7.

Tabelul IV.1.

Denumirea sarcinilor	Lucrarea	Nomenclatura	Sarcini precedente	Sarcini următoare	Durata	t_i	t_i^*	Drum critic
Începerea lucrărilor	—	*D*	—	*a,b,e*	0	0	0	*D**
Studiu instalații de încălzire	Încălzire	*a*	*D*	*c,t*	10	0	0	*a**
Studiu acoperiș	Acoperiș	*b*	*D*	*c,t*	3	0	7	*b*
Studiu șarpantă metalică	Șarpantă metalică	*c*	*a,b*	*d,k*	15	10	10	*c**
Studiu beton armat	Zidărie	*d*	*c*	*f*	10	25	45	*d*
Terasamente generale	Terasamente	*e*	*D*	*f*	15	0	40	*e*
Amplasare, instalații șantier	Zidărie	*f*	*d,e*	*g,i*	5	35	55	*f*
Terasamente fundații	Terasamente	*g*	*f*	*h*	30	40	60	*g*
Fundații beton	Zidărie	*h*	*g*	*n*	20	70	90	*h*
Terasamente grinzi	Terasamente	*i*	*f*	*j*	4	40	88	*i*
Grinzi beton	Zidărie	*j*	*i*	*n*	18	44	92	
Construcție în atelier	Șarpantă metalică	*k*	*c*	*l*	60	25	25	*k**
Strat protecție de zugrăveli	Zugrăveli	*l*	*k*	*m*	20	85	85	*l**
Transportul șarpantei	Șarpantă metalică	*m*	*l*	*n*	5	105	105	*m**
Montajul șarpantei	Șarpantă metalică	*n*	*h,j,m,*	*r,w,x,*	25	110	110	*n**
Montajul instalației de încălzire	Încălzire	*r*	*n*	*s*	35	135	135	*r**
Zugrăveală (alte straturi)	Zugrăveală	*s*	*r*	*u*	40	170	170	*s**
Studiul instalațiilor electrice	Electricitate	*t*	*a, b*	*v*	2	228	228	*t*
Izolații acoperiș	Acoperiș	*u*	*s*	*v*	20	210	210	*u**
Montaj instalații electrice	Electricitate	*v*	*t, u*	*F*	20	230	230	*v**
Pardoseală cu dale	Zidărie	*w*	*n*	*F*	35	135	215	*w*
Tencuirea pereților de umplutură	Zidărie	*x*	*n*	*F*	35	135	195	*x*
Sfîrșitul lucrărilor	—	*F*	*v,w,x*	—	0	250	250	*F**
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)

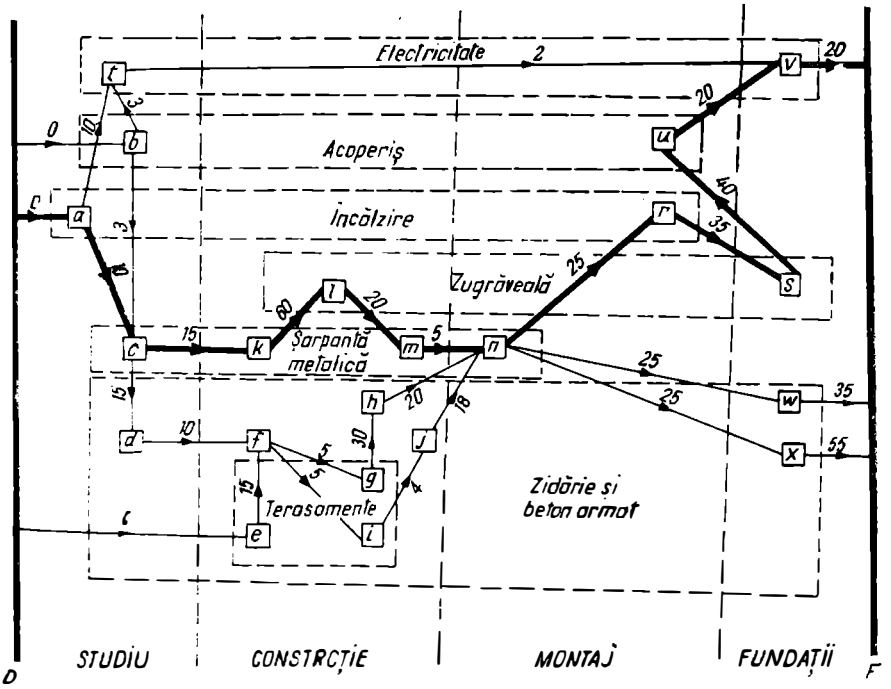


Fig. IV. 1

Dispoziția relativă a vîrfurilor în graf nu are alt scop decît să ușureze înțelegerea programului, grupînd sarcinile după un criteriu logic. În exemplu nostru, am grupat sarcinile după felul lucrării și după fazele de desfășurare ale proiectului : studii, construcție, montaj și finisare ; această dispunere va ușura ulterior o subdiviziune a sarcinilor figurînd în fiecare grupare. Informația conținută în coloanele 3, 4 și 6 din tabelul IV.1 permite stabilirea tabelului IV.2, cu ajutorul căruia se va aplica algoritmul pentru obținerea datei celei mai apropiate a pornirii fiecărei sarcini. De fapt acest al doilea tabel reia datele furnizate de primul, prezentîndu-le diferit pentru a simplifica calculul. Prima linie reprezintă lista sarcinilor corespunzătoare vîrfurilor grafului ; dedesubtul fiecăreia dintre aceste sarcini s-au notat cele care o preced imediat cu duratele lor. În sfîrșit s-au aranjat subcoloanele a căror motivare va fi explicată mai departe.

Se atribuie lui D — începerea lucrărilor — data 0 și se scrie această cifră la stînga lui D, care se află în capul primei coloane, la fel ca în subcoloanele alăturate celorlalți D care figurează în acest tabel. Apoi se caută o coloană care să fie completă, adică care să posede tot atîtea elemente în subcoloană, cît și în coloană; se efectuează atunci suma cantităților fiecărei linii și se păstrează suma maximală care se scrie în capul coloanei, la stînga literei care reprezintă o sarcină a programului.

Se repetă acest proces sistematic. Valorile găsite, o dată scrise în capul coloanelor, sînt reproduse în subcoloane alături de literele corespunzătoare, ceea ce permite să se completeze subcoloanele și să se determine noile coloane.

În final se va putea scrie un număr alături de litera F, indicînd sfîrșitul lucrărilor. Înțelegerea algoritmului este facilitată de fig. IV. 2, în timp ce rezultatul final este indicat în tabelul IV. 3.

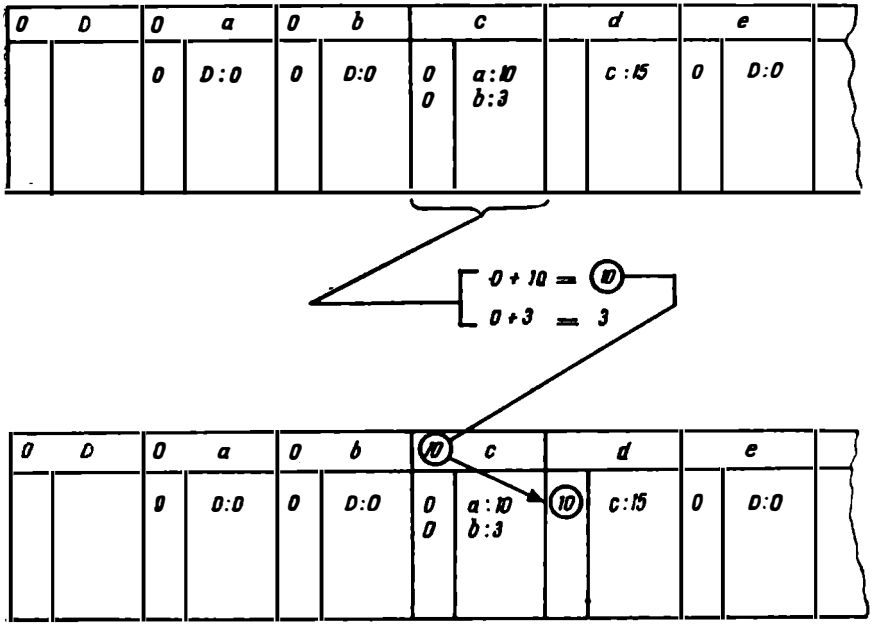


Fig. IV.2

Acest algoritm conduce întotdeauna la soluția problemei, cu excepția cazului cînd există circuite în program; această eventualitate nu este luată în considerație, deoarece corespunde unei erori de logică în descrierea proiectului.

În anumite programe foarte complexe se poate întîmpla ca într-o primă dispunere să existe astfel de circuite care vor fi detectate de algoritm, deoarece se ajunge la o situație unde acesta se blochează, fără a se fi obținut data terminală a programului. Există, de altfel, alți algoritmi *) care permit detectarea circuitelor unui graf.

Algortimul prezentat aici posedă avantajul de a nu necesita enumerarea succesivă a vîrfurilor grafului; el conduce de asemenea la o aplicare manuală simplă și cu ajutorul lui se pot rezolva probleme cu un număr destul de mare de vîrfuri sau sarcini.

În exemplu nostru, sfîrșitul lucrărilor sau al proiectului va avea loc, cel mai curînd, la data 250.

Pentru a determina datele cele mai tîrzii de punere în execuție a diferitelor sarcini, se construiește un nou tabel IV.4, unde se consideră sarcinile care urmează imediat celor așezate în capul coloanelor. Alături de litera F se scrie valoarea, calculată mai înainte, a datei de realizare a proiectului, adică 250, și se aplică același algoritm schimbînd numai cuvintele sumă prin diferență și maximal prin minimal. Aceasta permite obținerea tabelului IV.5, unde în cap, alături de fiecare literă reprezentînd o sarcină, este notată data t_i^* corespunzătoare.

Sarcinile ale căror date cele mai apropiate și cele mai tîrzii coincid (sarcini critice) sînt notate cu un asterisc în coloana 9 a tabelului IV.1; urmărirea lor constituie, după cum se știe, drumul critic. Calculul diferitelor margini se poate efectua de asemenea fără dificultăți, permițînd astfel să se completeze informația deja obținută.

---

*) *Recherche des chemins et circuits Hamiltoniens d'un graphe*, Revue Française de Recherche Opérationnelle, nr. 26, pag. 61—73.

D	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
	D : 0	D : 0	a : 10 b : 3	c : 15	D : 0	d : 10 e : 15	f : 5	g : 30	f : 5	i

0 D	0 a	0 b	10 c	25 d	0 e	35 f	40 g	70 h	40 i	44 j	25 k	85
0 D : 0	0 D : 0	0 D : 0	0 a : 10 0 b : 3	10 c : 15	0 D : 0	25 d : 10 0 e : 15	35 f : 5	40 g : 30	35 f : 5	40 l : 4	10 c : 15	25 k :

D	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
e : 0 b : 0 a : 0	l : 10 c : 10	l : 3 c : 3	k : 15 d : 15	f : 10	f : 15	i : 5 g : 5	h : 30	n : 20	j : 4	n : 18

D 0	a 0	b 7	c 10	d 45	e 40	f 55	g 60	h 90	i 88	j 92	k
e : 0 40 b : 0 7 a : 0 0	t : 10 228 c : 10 10	t : 3 228 c : 3 10	k : 15 25 d : 15 45	f : 10 55	f : 15 55	i : 5 88 g : 5 60	h : 30 90	n : 20 110	j : 4 92	n : 18 110	l : 60

Tabelul IV.2

k	l	m	n	r	s	t	u	v	w	x	F
c : 15	k : 60	l : 20	h : 20 j : 18 m : 5	n : 25	r : 35	a : 10 b : 3	s : 40	t : 2 u : 20	n : 25	n : 25	V : 20 W : 35 X : 55

Tabelul IV. 3

05 m	110 n	135 r	170 s	10 t	210 u	230 v	153 w	135 x	250 F
5 l : 20	70 h : 20	110 n : 25	135 r : 35	0 a : 10	170 s : 40	10 t : 2	110 n : 25	110 n : 25	230 V : 20
	44 j : 18			0 b : 3		210 u : 20			135 W : 35
	105 m : 5								135 X : 55

Tabelul IV.4

k	l	m	n	r	s	t	u	v	w	x	F
60	m : 20	n 5	x : 25 w : 25 r : 25	s : 35	u : 40	v : 2	v : 20	F : 20	F : 35	F : 55	

Tabelul IV.5

85	m 105	n 110	r 135	s 170	t 228	u 210	v 230	w 215	x 195	F 250
: 20 105	n : 5 110	x : 25 195 w : 25 215 r : 25 135	s : 35 170	u : 40 210	v : 2 230	v : 20 230	F : 20 250	F : 35 250	F : 55 250	

BIBLIOGRAFIE

Este evident că din lipsă de spaţiu nu putem cita toate articolele publicate despre sistemul PERT. Dăm aici numai articolele de bază pe care le-am utilizat la redactarea acestei broşuri şi pe care cititorul le va putea consulta cu interes.

Cărţi

[1] BERGE, C. *Teoria grafurilor şi aplicaţiile ei* (trad. din l. franceză). Bucureşti, Editura tehnică, 1969.

[2] KAUFMANN, A., CRUON, R. *La programmation dynamique.* Dunod, 1965.

[3] KAUFMANN, A. *Metode şi modele ale cercetării operaţionale* (trad.din l. franceză). Bucureşti, Editura ştiinţifică, 1967.

Aceste lucrări nu se referă la metoda drumului critic, dar în ele se vor găsi diferite elemente ale teoriei grafurilor şi ale programării dinamice care sînt utilizate în mai multe paragrafe din această carte.

Articole

Capitolul 2

[4] P.E.R.T., Phase I & II. Summary Report, Special Projects Office. Dept of Navy, Washington D. C.

[5] MALCOLM, D. G., ROSEBOOM, J. H., CLARK, C. E., FAZAR, W. Application of a Technique for Research and Development Program Evaluation, Operations Research, **7**, 5, 1959.

[6] FUCHS, C. Une méthode d'Analyse et d'évaluation des programmes : le P.E.R.T., Chefs d'Entreprise, 1962, A. Étude Centre Français de R.O., P.E.R.T., 12/61.

Aceste trei articole sînt articolele de bază pentru capitolul 2. Se va putea consulta oricare din cele trei.

[7] GRUBBS, Frank E. Attempts to validate certain P.E.R.T. statistics or « picking on P.E.R.T. ». Opns. Res., **10**, 6, 1962.

[8] CLARK, Charles E., « The P.E.R.T. model for distribution of an activity time» Opns. Res., **10**, 3, 1962.

Articolele [7] şi [8] dau precizări asupra repartiţiei β utilizate în sistemul PERT.

[9] FULKERSON D. R., Expected critical path lengths in P.E.R.T.networks, Opns. Res., **10**, 6, 1962.

[10] HEALY, Thomas L. Activity Subdivision and P.E.R.T. probability statements Opns. Res., **9**, 3, 1961.

[11] VENTURA, E. Impressions sur les tendances actuelles de la Recherche opérationnelle aux U.S.A., Revue Française de Recherche opérationnelle (*SOFRO*), 25.

[12] ROY, B. *Graphes et Ordonnancements. SOFRO*, **25**.

Articolele [11] şi [12] reprezintă o bună introducere în metoda PERT.

[13] ROY, B. Contribution de la théorie des graphes à l'étude des problèmes d'ordonnancement. 2e Conférence Internationale sur la R.O., Aix-en-Provence, 1960.

[14] Roy, B., Contribution de la théorie des graphes à l'étude de certains problèmes linéaires. C. R. Acad. Sciences, T. 248, p. 2.437, 1959.
[15] Roy, B., Cheminement et connexité dans les graphes. Application aux problèmes d'ordonnancement. METRA, série spéciale, n° **1**, 1962.
[16] Roy, B., Simonnard, M. «Nouvelle méthode permettant d'explorer un ensemble des possibilités et de déterminer un optimum ». Revue Française de Recherche opérationnelle, n **18**.
[17] Algan, M., Roy, B., Simonnard, M. Principe d'une méthode d'exploration de certains domaines et application à l'ordonnancement de la construction des grands ensembles. Cahiers du Centre de Mathématiques et de Statistique appliquées aux Sciences sociales. Ed. Institut Solvay, Bruxelles, **3**, (1962), p. 41.
Articolele [13] — [17] vor permite cititorului să aprofundeze așa-zisa metodă a potențialelor de care am vorbit la sfîrșitul capitolului 2.

Capitolul 3
[18] Eisner, Howard. A generalized network approach to the planning and scheduling of a research project. Opns. Res. **10**, 1.
[19] Information Scientifique Bull, La programmation dynamique, par A. Kaufmann.

Capitolul **4**
[20] Carré. Méthode du Chemin Critique. Service Technologie Shell. Petit Couronne, Rouen.
[21] Kelley, James E. Critical Path planning and Scheduling — Mathematical Basis, Opns, Rs., **9**, 3, 1961.
[22] Kelley, James E. Jr., & Morgan, R. Walker. Critical Path Planning and Scheduling, 1959. Proceeding of the Eastern Joint computer conference, p. 160—173.
[23] Fulkerson. D. R. A Network Flow computation for project cost curves.
— Rand Paper, P — 1947, 1960.
— Management Science, 1961
[24] Bildson, R. A., Gillepsie, J. R. „Critical Path planning. P.E.R.T. integration". Opns. Res. **10**, 6, 1962.
Cititorul care dorește o bibliografie foarte completă a articolelor americane apărute despre metoda PERT va putea să consulte :
[25] Bigelow, Clifford George. „Bibliography on Projet Planning and Control by Network Analysis". 1959—1961. Opns. Res. **10**, 5. 1962.

DICȚIONAR DE TERMENI FOLOSIȚI ÎN LUCRARE

Metoda drumului critic — (Méthode du chemin critique — Critical Path Planning — Critical Path Method)

PERT — estimare și revizuire a planurilor (Program Evaluation Research Task. Program Evaluation and Review Technique).

Operații — lucrări, activități (Opérations, jobs, tasks, activities) : P_{ij}.

Eveniment — obiectiv (événement, event) : E_i.

Program — (programme, program, planning).

Calendar — (calendrier, schedule, scheduling).

Graf — diagramă cu săgeți (graphe, directed network, flow chart, linear graph).

Timp operator — durata unei operații (temps opératoire, job tome, duration of an activity, elapsed time) : t_{ij}.

Timp operator mediu — durata medie a unei operații (temps opératoire moyen, expected elapsed time, mean time) : t_{ij}.

Interval de fluctuație — (intervalle de flottement, (floating time, slack).

Data așteptată a unui eveniment — data cea mai apropiată (date attendue d'un événement ; earliest time) : t_i.

Data limită a unui eveniment — data cea mai tîrzie (date limite d'un événement, latest time) : t^*_i.

Arc — săgeată (arc, arrow).

Vîrf — nod (sommet, node)

Drum — (chemin path).

Durata minimală — estimație optimistă (durée minimale, optimistic time) : a_{ij}.

Durata maximală — estimație pesimistă (durée maximale, pesimistic time) : b_{ij}.

Durata cea mai probabilă — (durée la plus probable, more probable time) : m_{ij}.

CUPRINS

Cuvînt înainte 5
Prefață. 7

1. GRAFURI DE ORDONANȚARE

1.1. Introducere 9
1.2. Noțiunea de graf. 9
1.3. Relația de ordine strictă într-un graf conex fără circuite. 14
1.4. Descompunerea unui graf conex fără circuite în nivele. 15
1.5. Găsirea unei ordonanțări. 30

2. STABILIREA UNUI PROGRAM DE CERCETARE SAU DE PRODUCȚIE

2.1. Introducere 35
2.2. Reprezentarea unui program printr-un graf 35
2.3. Data realizării ansamblului de lucrări. Drumul critic 45
2.4. Intervale de fluctuație. Margini ale operațiilor 47
2.5. Căutarea drumului critic. Algoritmii utilizați 53
2.6. Două exemple de aplicație. 62
2.7. Operații cu durată aleatoare 75
2.8. Realizarea unui calendar 88
2.9. Utilizarea unui calculator electronic 91

3. GENERALIZAREA METODEI PERT

3.1. Introducere 95
3.2. Evenimente decizionale 95
3.3. Cîteva precizări asupra terminologiei folosite 98
3.4. Enumerarea evenimentelor terminale posibile 99
3.5. Probabilitatea evenimentelor terminale 101
3.6. Funcția entropie 103
3.7. Metoda PERT generalizată. 104

4. OPTIMIZAREA FUNCȚIEI ECONOMICE A COSTURILOR

4.1. Introducere 106
4.2. Unele considerații generale 106

4.3. Diminuarea costului total al unui program 108
4.4. Accelerarea unui program la cel mai mic cost 112
4.5. Variația arbitrară a costului operator în funcție de durată 116
4.6. Variația liniară a costului în funcție de durată. Program liniar parametric. 118
4.7. Algoritmul lui Fulkerson 120
4.8. Detalii ale procedeului iterativ utilizat în algoritmul lui Fulkerson . . . 124
4.9. Exemplu de aplicare a algoritmului lui Fulkerson 129
4.10. Program optimal 154
4.11. Optimizarea unui program cînd duratele operațiilor sînt aleatoare. 155
Concluzii. 161

ANEXE

I. Repartiția β 166
II. Valoarea medie a unui drum critic într-un graf de program. 168
II.1. Ipoteze și notații. 168
II.2. Aproximația f_i a valorii unui drum critic 171
II.3. Cîteva exemple numerice 175
III. Subsiviziunea operațiilor și realizarea unui calendar. 177
IV. Aplicarea metodei potențialelor 185
Bibliografie 192
Dicționar de termeni folosiți în lucrare 194

Bun de tipar 1.12.1971. Coli de tipar 12,25. C.Z. 519.14

Întreprinderea poligrafică „Informația" Str. Brezoianu 23–25 București

seria
BAZELE
MATEMATICE
ALE
CERCETĂRII
OPERAȚIONALE

În seria „BAZELE MATEMATICE ALE CERCETĂRII OPERAȚIONALE"

a apărut :

M. Maliţa, C. Zidăroiu
„MATEMATICA ORGANIZĂRII"

vor apărea :

N. Teodorescu, Gh. Boldur, M. Stoica, I. Băncilă, I. Stancu-Minasian
„METODE ALE CERCETĂRII OPERAȚIONALE ÎN GESTIUNEA ÎNTREPRINDERILOR"

I. Tomescu
INTRODUCERE ÎN COMBINATORICĂ

Lei. 16,50

Editura tehnică